Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Chiara Boiti

Evoluzione per sistemi differenziali sovradeterminati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 85–88.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_85_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 85-88

Evoluzione per sistemi differenziali sovradeterminati.

CHIARA BOITI

In questa tesi ci siamo occupati del problema di Cauchy per sistemi differenziali sovradeterminati in diversi spazi funzionali, come lo spazio delle funzioni di Whitney, lo spazio delle funzioni di Whitney ultradifferenziabili di classe (M_p), o alcuni spazi di funzioni di Whitney che soddisfino condizioni di crescita all'infinito.

Il nostro approccio generale permette di raggruppare in un unico schema problemi diversi, che vanno dal problema di Cauchy classico (cf. Capitoli 1, 3, 5, 6), al confronto tra soluzioni formali ed effettive (Capitolo 4), alla buona positura o alla regolarità delle soluzioni (Capitolo 7), a problemi di crescita all'infinito delle soluzioni (Capitoli 1, 3, 7).

Nel problema di Cauchy classico si cerca una soluzione di un'equazione differenziale alle derivate parziali su una varietà con bordo, richiedendo che la traccia della soluzione e di alcune delle sue derivate normali assumano valori assegnati su una data porzione del bordo. In generale, le ipotesi sono tali che, per una soluzione C^∞ fin sul bordo, l'equazione differenziale e i dati iniziali permettano di calcolare tutte le sue derivate parziali nei punti della porzione di bordo assegnata.

Nella tesi abbiamo risolto la questione della coerenza formale dei dati, che sorge naturalmente nel caso sovradeterminato, ammettendo come dati iniziali soluzioni formali (nel senso di Whitney) sulla varietà iniziale. Utilizzando le funzioni di Whitney, possiamo considerare una situazione più generale: consideriamo una coppia $K_1 \subset K_2$ di sottoinsiemi di R^N, con K_2 localmente chiuso e K_1 chiuso in K_2, e pensiamo a K_1 come all'insieme dove sono assegnati i dati iniziali, e a K_2 come all'insieme dove vogliamo trovare la soluzione del problema di Cauchy.

Per dare un'idea del tipo di problema da noi studiato consideriamo, per il momento, il caso delle funzioni di Whitney e dei sistemi a coefficienti costanti. Sia, dunque, $A_0(D)$ un operatore differenziale alle derivate parziali a coefficienti costanti, definito da una matrice $A_0(\zeta)$ di dimensione $a_1 \times a_0$ a coefficienti in $\mathcal{P} = C[\zeta_1, \ldots, \zeta_N]$, e consideriamo il seguente *problema di Cauchy*:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{date } f \in W_{K_2}^{a_1} \text{ con } A_1(D)\, f = 0 \text{ e } \varphi \in W_{K_1}^{a_0} \text{ tale che } A_0(D)\, \varphi = f|_{K_1}, \\ \text{trovare } u \in W_{K_2}^{a_0} \text{ tale che } A_0(D) u = f \text{ e } u|_{K_1} = \varphi\,, \end{cases}$$

dove W_{K_j} è lo spazio delle funzioni di Whitney su K_j, per $j = 1, 2$, e $A_1(D)$ è una matrice di operatori differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti che fornisce le condizioni d'integrabilità per la f (necessarie nel caso sovradeterminato da noi considerato).

Considerando il caso sovradeterminato e problemi di Cauchy con valori iniziali assegnati su insiemi piuttosto arbitrari, finiamo per escludere alcuni effetti che sono conseguenze di proprietà speciali delle ipersuperfici. In molti casi è come se una lente d'ingrandimento ci permettesse di separare fatti che sono indistinguibili nel caso determinato o scalare. Per esempio, otteniamo due diverse nozioni di non-caratteristico, una più debole, legata al teorema di unicità tipo Holmgren, e una più forte, che rende valido il teorema di Cauchy-Kowalewski; anche evoluzione locale e globale diventano due concetti distinti non appena si studiano i sistemi sovradeterminati.

Classificando i problemi differenziali in termini del loro comportamento analitico, in modo da studiare le condizioni algebriche che causano una determinata situazione, piuttosto che seguire la strada opposta, diamo la seguente:

DEFINIZIONE 1. – *La coppia* (K_1, K_2) *è di* evoluzione (*risp.*: di causalità, iperbolica) *per* $A_0(D)$ (*o per il* $\mathcal{P}$*-modulo* $M = \operatorname{coker}^t A_0(\zeta)$), *nella classe di Whitney, se il problema di Cauchy* (1) *ha almeno una soluzione* (*risp.*: *al più una soluzione, una e una sola soluzione*).

Usando la trasformata di Fourier-Laplace, il principio fondamentale di Ehrenpreis e la dualità, il problema di Cauchy sovradeterminato si traduce in questioni che riguardano spazi di funzioni intere su varietà algebriche affini irreducibili (troviamo che questi spazi sono $(\mathcal{LF})$, «tonnelé», $(\mathcal{DF})$, di Schwartz, di Montel, bornologici, riflessivi, completi; cf. Capitolo 2).

Grazie a due lemmi algebrici che prendiamo in prestito da [6], ci riconduciamo in primo luogo al caso in cui il $\mathcal{P}$-modulo $M = \operatorname{coker}^t A_0(\zeta)$ sia della forma $M = \mathcal{P}/\wp$ per un ideale primo $\wp$ di $\mathcal{P}$. Dimostriamo poi che l'evoluzione è equivalente alla validità di un principio di Phragmén-Lindelöf per funzioni olomorfe sulla varietà algebrica affine associata $V = V(\wp) = \{\zeta \in C^N : p(-\zeta) = 0 \ \forall p \in \wp\}$. Dimostriamo anche, seguendo [5], l'equivalenza di questo principio di Phragmén-Lindelöf per funzioni olomorfe con uno simile per funzioni plurisubarmoniche, più semplice da maneggiare nelle applicazioni. Ne ricaviamo, tra l'altro, risultati sull'esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy sovradeterminato con dati iniziali su un sottospazio affine formalmente non-caratteristico e quasi-libero.

Nel caso delle funzioni di Whitney, confrontiamo le nostre condizioni necessarie e sufficienti per l'evoluzione con quelle ottenute da Hörmander in [4]. Nel nostro linguaggio, il caso che egli ha considerato è quello di una coppia che consiste in un semispazio chiuso di R^N e nel suo bordo, e nel quoziente di $\mathcal{P}$ per un ideale principale.

Nel nostro caso, se il sottospazio affine iniziale Σ è della forma $\Sigma = \{(t, x) \in R^k \times R^n : t = 0\}$ e cerchiamo una soluzione nel cuneo $\Gamma = \bigcap_{j=1} \{t_j \geq 0\}$, date la proiezione naturale $\pi_n : V \ni (\tau, \zeta) \mapsto \zeta \in C^n$ e la varietà algebrica affine propria $Z \subset C^n$ tale che $V \backslash \pi_n^{-1}(Z)$ sia C^∞ e $\pi_n|_{V \backslash \pi_n^{-1}(Z)}$ sia un rivestimento a m fogli di

$C^n \backslash Z$, la condizione che generalizza in modo naturale quella di Hörmander è la seguente:

$$(H) \qquad \begin{cases} \exists R > 0, \quad c_0 \in R \text{ tali che} \\ \text{per ogni } \varrho \in R^n \text{ con } B_n(\varrho, R) = \{ |\zeta - \varrho| \leq R \} \subset C^n \backslash Z \\ \text{e per ogni compenente connessa } \omega \text{ di } \pi_n^{-1}(B_n(\varrho, R)) \\ \text{esista } \theta = (\tau, \zeta) \in \omega \text{ tale che} \\ \operatorname{Im} \tau_j \leq c_0 \text{ per } j = 1, \ldots, k . \end{cases}$$

Abbiamo dimostrato:

TEOREMA 1. – *Se Σ è formalmente non-caratteristica e quasi-libera e Γ è il cuneo $\Gamma = \bigcap_{j=1}^{k} \{t_j \geq 0\}$, allora condizione necessaria affinché la coppia (Σ, Γ) sia d'evoluzione per M, nella classe di Whitney, è che per ogni $\wp \in \operatorname{Ass}(M)$ la condizione (H) sia soddisfatta su $V = V(\wp)$.*

Per la sufficienza abbiamo avuto bisogno di rafforzare la condizione (H) con la seguente:

$$(H)' \qquad \begin{cases} \exists R, r > 0, \quad c_1 \in R \text{ tali che} \\ \text{per ogni } \varrho \in R^n \text{ con } B_n(\varrho, R) \subset C^n \backslash Z \\ \text{e per ogni componente connessa } \omega \text{ di } \pi_n^{-1}(B_n(\varrho, R)) \\ \text{esista } B(\zeta_\varrho, r) \subset B_n(\varrho, R) \text{ tale che} \\ \operatorname{Im} \tau_j \leq c_1 \quad \forall \theta = (\tau, \zeta) \in \pi_n^{-1}(B(\zeta_\varrho, r)), \quad j = 1, \ldots, k . \end{cases}$$

Abbiamo dimostrato:

TEOREMA 2. – *Se Σ è formalmente non-caratteristica e quasi-libera e $K_1 \subset \Sigma$,* $K_2 \subset \Gamma$ sono compatti convessi, allora condizione sufficiente affinché la coppia (K_1, K_2) sia d'evoluzione per M, nella classe di Whitney, è che per ogni $\wp \in \operatorname{Ass}(M)$ la condizione $(H)'$ sia soddisfatta su $V = V(\wp)$.

Abbiamo tuttavia osservato che nei casi $n = 1$ o $k = 1$ la condizione (H) è necessaria e sufficiente per l'evoluzione di (K_1, K_2) (per $k = 1$, (H) e (H)' coincidono).

Per quanto riguarda l'evoluzione abbiamo anche dimostrato la sufficienza di una condizione di tipo Petrowski, nei vari spazi funzionali considerati nella tesi.

Riguardo l'iperbolicità, abbiamo ottenuto delle condizioni necessarie e sufficienti per la buona positura del problema di Cauchy sovradeterminato nei vari spazi funzionali considerati, studiando anche la relazione tra l'iperbolicità di un dato sistema di operatori differenziali lineari alle derivate parziali e quella della sua parte principale. Com'è già noto nel caso scalare, abbiamo trovato che l'iperbolicità di un dato sistema implica l'iperbolicità della sua parte principale, mentre il viceversa è falso, in generale. Tuttavia, abbiamo dimostrato, generalizzando un risultato classico (cf. [3]), che esiste un razionale $q \in [0, 1)$ tale che l'iperbolicità della parte principale implica quella del sistema dato nella classe (piccola) Gevrey di ordine s con $1 < s \leqslant 1/q$.

Per quanto riguarda la causalità, infine, abbiamo dimostrato un teorema di unicità tipo Holmgren per il problema di Cauchy con dati iniziali su una sottovarietà non-caratteristica e per un sistema di operatori differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti analitici reali. Nel caso dei coefficienti costanti abbiamo dimostrato che la condizione che il sottospazio affine iniziale Σ di R^N sia non-caratteristico è anche necessaria affinché la coppia (Σ, R^N) sia di causalità; in generale, invece, la condizione che Σ sia non-caratteristica non è sufficiente affinché una coppia della forma (Σ, Γ), per un cuneo chiuso Γ con spigolo uguale a Σ, sia di causalità: è una condizione solo necessaria.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREOTTI A. e NACINOVICH M, *Complexes of partial differential operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **IV, 3** (1976), 553-621.

[2] ANDREOTTI A. e NACINOVICH M., *Analytic Convexity and the Principle of Phragmén-Lindelöf*, Quaderni della Scuola Norm. Sup., Pisa (1980).

[3] HÖRMANDER L., *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, Berlin (1963).

[4] HÖRMANDER L., *The analysis of linear partial differential operators*, vol. II, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[5] MEISE R., TAYLOR B.A. e VOGT D., *Equivalence of Analytic and Plurisubharmonic Phragmén-Lindelöf Conditions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **52**, Part 3 (1991), 287-308.

[6] NACINOVICH M., *Cauchy problem for overdetermined systems*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, **IV, CLVI** (1990), 265-321.

Dipartimento di Matematica «Ennio De Giorgi», Lecce
e-mail: cboiti@ilenic.unile.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo VIII
Direttore della ricerca: Prof. M. Nacinovich, Dipartimento di Matematica, Pisa