Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Adriano Tomassini

G-Geometrie omogenee e uniformizzazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 71–74.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_71_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 71-74

G-Geometrie omogenee e uniformizzazione.

ADRIANO TOMASSINI

L'oggetto principale di questa Tesi è lo studio delle varietà localmente modellate su spazi omogenei, con particolare riguardo a quelle localmente isomorfe allo spazio modello $X := SO(2n, \mathbf{R})/U(n)$ e $Aut\, Hol(X)$-omogenee. Più precisamente, sia G un gruppo di Lie e H un suo sottogruppo chiuso: una varietà topologica M si dice *localmente modellata* su G/H (oppure che è dotata di una $(G/H, G)$-*geometria integrabile* o di una G-*geometria*), se esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di M tale che, per ogni $i \in I$, sia assegnato

$$\varphi_i \colon U_i \to \varphi_i(U_i) \subset G/H ,$$

omeomorfismo, la cui immagine sia un aperto di G/H, in modo che, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

sia la restrizione di un elemento del gruppo G. Una varietà M con una G-geometria si dice una G-*varietà*.

La definizione di G-geometria può essere data anche in un contesto più generale, senza assumere che il modello locale sia uno spazio omogeneo. In tal caso, in luogo di G/H, si considera una varietà differenziabile X, lo spazio modello, e, in luogo di G, un sottogruppo, ancora indicato con G, di diffeomorfismi di X che sia *formalmente analitico*, i. e. tale che se due elementi g_1 e g_2 coincidono su un aperto non vuoto di X, allora coincidono ovunque. Se M è una G-varietà, il suo rivestimento universale $\widetilde{M}$ è in modo naturale una G-varietà. Infatti, in queste condizioni, si dimostra che esistono un omomorfismo $\varrho \colon \pi_1(M) \to G$ e una (X, G)-immersione $\Phi \colon \widetilde{M} \to X$, equivariante, cioè tale che

$$\Phi \circ [\gamma] = \varrho([\gamma]) \circ \Phi .$$

Viceversa, le (X, G)-strutture su una varietà M sono determinate da un omomorfismo $\varrho \colon \pi_1(M) \to G$ e da un'immersione equivariante $\Phi \colon \widetilde{M} \to X$. Naturalmente la situazione più interessante si presenta quando il modello è uno spazio omogeneo. Molte strutture geometriche notevoli rientrano nella classe delle G-geometrie, come ad esempio, le *strutture localmente conformalmente piatte* [7], le *strutture quaternioniche* [8], le *ipersuperficie sferiche* in varietà complesse [2].

Ricordiamo che se G/H è uno spazio omogeneo e $o = H$, la r-rappresentazione di isotropia $\alpha \colon H \to End(T_o G/H)$ è definita da $\alpha(h) = h_*[o]$. Se M ha una

$(G/H, H)$-struttura, poniamo

$$L_G^r(M)_p = \{ j_p^r(f) \in L^r(M)_p \colon f^{-1} \text{ sia una } (X, G) \text{— carta attorno a } p \in M \},$$

$$L_G^r(M) = \bigcup_{p \in M} L_G^r(M)_p .$$

Si dimostrano le seguenti

PROPOSIZIONE 1. – *Se M ha una $(G/H, H)$-struttura, allora $L_G^r(M)$ è una H-riduzione integrabile di $L^r(M)$.*

PROPOSIZIONE 2. – *Se P è una H-riduzione integrabile di $L^{r+1}(M)$, allora M ha una $(G/H, G)$-struttura.*

Si affronta successivamente lo studio delle G-geometrie nel caso in cui la varietà modello è lo spazio omogeneo $X := SO(2n, \mathbf{R})/U(n)$, che può essere identificato con

$$Z(n) := \{ P \in SO(2n, \mathbf{R}) : P^t = -P, \text{ che induca la stessa orientazione di } J_0 \} = \{ AJ_0A^t : A \in SO(2n, \mathbf{R}) \},$$

i.e. $Z(n)$ parametrizza le strutture complesse su $\mathbf{R}^{2n}$ che sono ortogonali rispetto alla metrica euclidea e che inducono la stessa orientazione di J_0, la struttura complessa standard su $\mathbf{R}^{2n}$. $Z(n)$ è uno spazio *simmetrico, compatto, semplicemente connesso*, di *Kähler-Einstein*, di dimensione reale $n^2 - n$. Si ha che

$$Z(1) = \{P_0\}, \quad Z(2) = \mathbf{CP}^1, \quad Z(3) = \mathbf{CP}^3(\mathbf{C}), \quad Z(4) = \mathcal{Q}_6(\mathbf{C}),$$

essendo $\mathcal{Q}_6(\mathbf{C})$ la quadrica non singolare in $\mathbf{CP}^7$. In generale, $Z(n)$ è biolomorficamente equivalente alla sottovarietà analitica della Grassmanniana dei $\mathbf{CP}^{n-1}$ in $\mathbf{CP}^{2n-1}$, che giacciono sopra un'iperquadrica non singolare $\mathcal{Q}_{2n-2}(\mathbf{C})$. Il gruppo ortogonale speciale complesso $SO(2n, \mathbf{C})$ agisce transitivamente su $Z(n)$ nel modo seguente

$$P \mapsto (A + BP)\, P (A + BP)^{-1},$$

dove $P \in Z(n)$, $A + iB \in SO(2n, \mathbf{C})$. Questa azione è $\mathfrak{J}$-olomorfa, essendo $\mathfrak{J}$ la naturale struttura complessa definita su $Z(n)$ ([3], [5]). Il gruppo dei biolomorfismi di $Z(n)$, $Aut\, Hol(Z(n))$ è $SO(2n, \mathbf{C})/\pm I$, per $n > 2$ e $PSL(2, \mathbf{C})$ per $n = 2$. Si ha il seguente

LEMMA 1. – *Sia f un elemento di $Aut\, Hol(Z(n))$ tale che $j_{J_0}^2(f) = j_{J_0}^2(id)$; allora $f = id$.*

In particolare, $Z(n+1) = \mathcal{Z}(S^{2n})$. P. de Bartolomeis, L. Migliorini e A. Nannicini in [3] dimostrano che il Twistor Space su una varietà conformalmente piatta, di dimensione pari, è Kähleriano se e solo se la varietà è conformalmente equivalente alla sfera $2n$-dimensionale, con la metrica standard ($n > 2$). Questo costituisce una generalizzazione del risultato di N. Hitchin ([5]), per $n = 2$. Classificare i domini omogenei semplicemente connessi di $Z(n)$ equivale a classificare le varietà semplicemente connesse localmente modellate su $Z(n)$ e $Aut\, Hol(Z(n))$-omogenee. Una prima classificazione riguarda i domini omogenei *massimali*, vale a dire quei domini D per cui lo stabilizzatore

$$S_G(D) := \{g \in G : g(D) = D\}$$

agisce in modo transitivo ed è un sottogruppo massimale di $SO(2n, \mathbf{C})$. Fondamentale per la nostra classificazione è il lavoro di Dynkin [4] sui sottogruppi massimali dei gruppi classici. Nel caso generale si dimostra il seguente

TEOREMA 1. – *Sia G uno tra i seguenti gruppi $SO(k, \mathbf{C}) \times SO(2n-k, \mathbf{C})$, $SO(2n, \mathbf{R})$, $SO^*(2n)$, $SO^0(p, q, \mathbf{R})$, $0 < k < n$, $0 < p < n$, $p + q = 2n$ e $J_0 \in Z(n)$ la struttura complessa standard su $\mathbf{R}^{2n}$.*

$$D := \{(A + BJ_0)\, J_0 (A + BJ_0)^{-1} : A + iB \in G\}$$

è un dominio omogeneo massimale in $Z(n)$.

Nel caso $n = 2, 3$ si descrivono esplicitamente i domini omogenei semplicemente connessi, corrispondenti ai sottogruppi massimali si $SO(2n, \mathbf{C})$. Sia

$$V(n) := \{AJ_0 A^t : A \in O(2n, \mathbf{R})\}, \qquad Z^-(n) := V(n) - Z(n).$$

Si hanno i seguenti Teoremi

TEOREMA 2. – *Sia D un dominio omogeneo massimale in $Z(2)$; allora D è equivalente a uno tra i seguenti*

1) $Z(2) - \{P_0, -P_0\}$
2) $SO^*(4)/U(2)$
3) $Z(2)$.

Si ha il seguente

TEOREMA 3. – *Sia D un dominio omogeneo massimale in $Z(3)$; allora D è equivalente a uno tra i seguenti*

1) $Z(3) - \{Z(2) \times Z(1) \cup Z^-(2) \times Z^-(2)\}$
2) $Z(3) - \left\{P \in Z(3) : P = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{pmatrix}\right\}$
3) $SO^*(6)/U(3)$
4) $Z(3)$.

Dai Teoremi di isomorfismo tra le algebre di Lie classiche, dai corrispondenti isomorfismi tra gli spazi simmetrici, si ha il seguente

COROLLARIO 1. – *Le $(Z(2), SO(4, \mathbf{C}))$-varietà omogenee, semplicemente connesse sono*

1) $\mathbf{C}$
2) $SO^*(4)/U(2) \simeq \Delta$
3) $Z(2)$

e le $(Z(3), SO(6, \mathbf{C}))$*-varietà omogenee, semplicemente connesse sono*

1) $Z(3) - \{Z(2) \times Z(1) \cup Z^-(2) \times Z^-(1)\}$
2) $Z(3) - \left\{ P \in Z(3) : P = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^t & 0 \end{pmatrix} \right\}$
3) $SO^*(6)/U(3) \simeq \mathbf{B}_3(\mathbf{C})$
4) $Z(3)$.

essendo Δ *e* $\mathbf{B}_3(\mathbf{C})$ *rispettivamente il disco unitario in* $\mathbf{C}$ *e la palla unitaria in* $\mathbf{C}^3$.

Diamo un esempio di quoziente compatto rivestito dal dominio

$$D = Z(3) - \{Z(2) \times Z(1) \cup Z^-(2) \times Z^-(1)\}.$$

ESEMPIO 1. – *Il dominio* D *è il Twistor Space della sfera 4-dimensionale meno 2 punti* p_1, p_2, *i.e. il Twistor Space di* $\mathbf{C}^2 - \{0\}$. *L'immersione del gruppo* conforme $C_n := O(1, n+1)/\pm I \hookrightarrow SO(2n, \mathbf{C})$ *induce un'azione di* C_n *su* $Z(n)$. *Si consideri la dilatazione* $g \colon \mathbf{C}^2 - \{0\} \to \mathbf{C}^2 - \{0\}$ *definita da*

$$g((z_1, z_2)) := (2z_1, 2z_2)$$

e sia Γ *il sottogruppo generato da* g. *Il quoziente* $\mathbf{C}^2 - \{0\}/\Gamma$ *è la varietà di Hopf* $S^1 \times S^3$. *Pertanto, il quoziente* $D/\tilde{\Gamma}$, *dove* $\tilde{\Gamma}$ *è l'immagine di* Γ *in* $SO(6, \mathbf{C})$, *è compatto, poiché è un fibrato su una varietà compatta con fibra compatta.*

REFERENCES

[1] BENOIST Y. and LABOURIE F., *Sur le espaces homogenès modèles de variétés compactes*, Hautes Etudes Scietifique Publ. Math., **76** (1992), 99-109.

[2] BURNS D. jr. and SHNIDER S., *Spherical hypersurfaces in complex manifolds*, Invent. Math., **33** (1976), 223-246.

[3] DE BARTOLOMEIS P., MIGLIORINI L. and NANNICINI A., *Propriété globales de l'espace de twisteurs*, Rend. Mat. Acc. Lincei, **2** (1991), 147-153.

[4] DYNKIN E.B., *Maximal subgroups of the classical groups*, Translations Amer. Math. Soc., **6** (1957), 245-378.

[5] HITCHIN N., *Kählerian twistor spaces*, Proc. London Math. Soc., **43** (1981), 133-150.

[6] SALAMON S. , *Harmonic and holomorphic maps*, Lecture Notes in Math., **1164** (1985), 161-224.

[7] SCHOEN R. and YAU S.-T., *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. Math., **92** (1988), 47-71.

[8] SOMMESE A., *Quaternionic manifolds*, Math. Ann., **212** (1975), 191-214.

Dipartimento di Matematica, Università di Parma
e-mail: adriano@prmat.math.unipr.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo VIII
Direttore di Ricerca: Prof. Paolo de Bartolomeis