Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Federico Starnone

Superfici algebriche con curve canoniche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 67–69.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_67_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 67-69

Superfici algebriche con curve canoniche.

FEDERICO STARNONE

La tesi di dottorato di Federico Starnone contiene un teorema di classificazione per superfici algebriche di tipo generale con curve canoniche trigonali. Per enunciarlo è opportuno dare una definizione.

DEFINIZIONE 1. – *Sia dato un sistema lineare $|L|$ su una superficie. Diremo che $|L|$ ha una g_n^1 se la generica curva di $|L|$ è liscia, irriducibile e senza punti base.*

Sia x un punto base per il sistema. Il punto x si dice punto base semplice per il sistema $|L|$ se in esso due generiche curve di $|L|$ si intersecano trasversalmente. Definiamo inoltre come parte libera della serie caratteristica del sistema $|L|$ la serie tagliata dal sistema $|L|$ su una generica curva di $|L|$ al di fuori dei punti base.

Diremo che $|L|$ è un sistema lineare di tipo (β, n) se:

1. *$|L|$ ha una g_n^1;*
2. *il sistema presenta β punti base semplici e nessun altro punto base;*
3. *il morfismo indotto dalla parte libera della serie caratteristica sulla generica curva di $|L|$ è composto con la g_n^1.*

Diremo infine che $|L|$ è strettamente di tipo (β, n) se inoltre il morfismo indotto dalla parte libera della serie caratteristica sulla generica curva di $|L|$ ha esattamente grado n.

Possiamo adesso proporre il risultato in questione.

TEOREMA 1. – *Sia F una superficie minimale di tipo generale con $p_g(F) \geqslant 4$. Supponiamo che il sistema canonico $|K_F|$ di F abbia una g_n^1 e presenti β punti base semplici e nessun altro punto base. Allora $|K_F|$ è di tipo $(\beta, 3)$. Se inoltre $|K_F|$ è strettamente di tipo $(\beta, 3)$, risulta $p_g(F) = 4$, $K_F^2 = 6 + \beta$ e $\beta \leqslant 2$ oppure $p_g(F) = 5$, $K_F^2 = 9$ e $\beta = 0$ e in entrambi i casi $q(F) = 0$.*

Infine tali superfici esistono e i loro modelli lisci si possono ottenere contraendo le curve eccezionali presenti in opportuni rivestimenti tripli di scoppiamenti delle superfici di Hirzebruch di grado 2 e 3.

La parte iniziale del lavoro è dedicata alla prova che le superfici in questione sono di tipo $(\beta, 3)$. Ciò si dimostra usando un ragionamento dovuto essenzialmente a Castelnuovo (si veda [1] e [2]) ripreso successivamente da G. Pompili (in [3] e [4]), da A. Franchetta (in [5]) e da C. Ciliberto (in [6]). Grazie a questa osservazione il risultato in questione si innesta nel quadro dei lavori volti a classificare e a costruire le superfici la cui mappa canonica sia 3:1. Tra questi va sicuramente ricordato il lavoro di E. Horikawa sull'argomento (si veda [7]) dove Horikawa classifica le superfici minimali regolari con $p_g = 4$, $K^2 = 6$ e ne fornisce una costruzione. Tale risultato è stato poi integrato da K. Konno, che affronta in maniera analoga il caso $p_g = 5$ (in [8]). Infine in [9] F. Zucconi estende la trattazione al caso $c_1^2 = 3p_g - 5$ (caso in cui il sistema canonico della superficie presenta un punto base).

La classificazione delle superfici in oggetto era già stata delineata sotto ipotesi piú restrittive delle nostre in un complesso di lavori di Pompili. Tra questi maggiormente significative sono le opere citate e [10], dove le superfici vengono costruite come opportune trasformazioni cermoniane di piani tripli. Nel presente lavoro la classificazione segue la linea della trattazione di Pompili con alcune significative semplificazioni dei suoi argomenti ed estendendo la prova ai casi in cui il sistema canonico presenti punti base semplici. La dimostrazione consiste di due fasi: dapprima si prova che il morfismo canonico è genericamente 3:1 e che l'immagine canonica è un cono quadrico in $\mathbf{P}^3$ o un cono cubico in $\mathbf{P}^4$; quindi si analizza il sistema lineare delle curve controimmagini delle rette e se ne deducono i limiti numerici di β, $p_g(F)$ e K_F^2.

Si passa poi alla costruzione delle superfici in questione. Diversamente dai risultati su menzionati (di Pompili, Horikawa, Konno e Zucconi), in questo lavoro vengono costruite tutte le superfici in esame, e non solo alcuni esempi. Per ottenere questo risultato viene usata la descrizione di R. Miranda [11] di un rivestimento triplo $\pi\colon X \to Y$ di una varietà nota, basata sull'analisi della struttura di $\mathcal{O}_X$ come $\mathcal{O}_Y$-modulo. Il principale dei risultati a cui Miranda perviene è che dare un rivestimento triplo $\pi\colon X \to Y$ di una superficie Y equivale a dare un $\mathcal{O}_Y$-modulo libero E di rango 2, detto *modulo di Tschirnhausen* ed un morfismo $\Phi\colon S^3 E \to \Lambda^3 E$. Miranda fornisce inoltre alcune formule per il calcolo degli invarianti del rivestimento e della curva di diramazione a partire dal modulo E sotto opportune ipotesi sulla natura del rivestimento stesso. Le ipotesi piú restrittive sono state in seguito rimosse da R. Pardini in [12].

Per utilizzare questi risultati si prova che, componendo il morfismo canonico (già genericamente 3:1) con opportuni scoppiamenti, questo diviene un morfismo finito. Quindi le superfici che desideriamo costruire risultano essere il modello minimo di rivestimenti tripli di superfici note (scoppiamenti di $\mathbf{F}_2$ o $\mathbf{F}_3$). Tali rivestimenti sono costruiti applicando i risultati di Miranda e di Pardini: utilizzando le condizioni imposte dal valore degli invarianti e dalla natura del rivestimento viene individuato il modulo di Tschirnhausen E di tali rivestimenti sotto l'ipotesi che questo spezzi in somma di fasci invertibili. Fissato E, ogni morfismo $\Phi\colon S^3 E \to \Lambda^3 E$ sufficientemente generale verifica le ipotesi di Miranda e quindi dà luogo ad una delle superfici cercate.

L'ultima parte della tesi è dedicata alla prova del fatto che il modulo di Tschirnhausen delle superfici in questione necessariamente spezza. La tecnica è quella consueta in questi casi: si costruisce una opportuna successione esatta del tipo

$$0 \to \mathcal{O}_Y(R) \to E^* \to \mathcal{O}_Y(L) \to 0$$

per $R, L \in Pic(Y)$ opportuni e quindi si prova che $Ext^1(\mathcal{O}_Y(L), \mathcal{O}_Y(R)) = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CASTELNUOVO G., *Sui multipli di una serie lineare di gruppi appartenente ad una curva algebrica*, Memorie scelte, Zanichelli, Bologna (1937).

[2] CASTELNUOVO G., *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, Memorie scelte, Zanichelli, Bologna (1937)

[3] POMPILI G., *Sulla rappresentazione algebrica dei piani tripli*, Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Roma, s. **4, III** (1939), 109-132.

[4] POMPILI G., *Sulle superficie algebriche le cui curve canoniche posseggono una* g_3^1, Rend. Istituto Lombardo, **74** (1940-1941), 280-286.

[5] FRANCHETTA A., *Sulle superficie algebriche le cui curve canoniche posseggono una* g_3^1, Bollettino UMI (1942), 238-243.

[6] CILIBERTO C., *Alcune applicazioni di un classico procedimento di Castelnuovo*, Seminari di Geometria 1982-1983 dell'Istituto di Geometria del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna (1983), 17-43.

[7] HORIKAWA E., *Algebraic surfaces of general type with small* c_2^1, *III*, Inventiones Mathematicae, **47** (1978), 209-248.

[8] KONNO K., *Algebraic surfaces of general type with* $c_2^1 = 3p_g - 6$, Math. Ann., **290** (1991), 77-107.

[9] ZUCCONI F., *Tesi di Dottorato*, Università di Pisa.

[10] POMPILI G., *Osservazioni sui piani tripli*, Rend. Istituto Lombardo, **74** (1940-1941), 263-279.

[11] MIRANDA R., *Triple covers in algebraic geometry*, American Journal of Mathematics (1983), 1123-1158.

[12] PARDINI R., *Triple covers in positive characteristic*, Arkiv für Mathematik, **27** (1982), 319-343.

Dipartimento di Matematica dell'Università di Tor Vergata, Roma
Dottorato in matematica (sede amministrativa: Roma) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: prof. Ciro Ciliberto
(ordinario di Geometria Superiore, Università di Tor Vergata, Roma)