Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marta Morigi

Su alcuni problemi riguardanti i p-gruppi finiti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 51–54.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_51_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 51-54

Su alcuni problemi riguardanti i p-gruppi finiti.

MARTA MORIGI

Accade sovente in teoria dei gruppi che lo studio dei gruppi finiti aventi una certa proprietà si traduca poi in un problema riguardante i p-gruppi, cioè i gruppi in cui ogni elemento ha ordine una potenza di un prefissato numero primo p. Gli argomenti trattati nella tesi rientrano appunto in questo ambito.

1. – Gruppi fattorizzati.

Il gruppo G sia fattorizzabile, cioè prodotto $G = AB$ di due suoi sottogruppi propri A e B. Vari autori hanno studiato come la struttura di A e B influenzi quella di G. Il risultato più famoso in questo ambito è quello dovuto a Kegel e Wielandt [1], i quali hanno dimostrato che se G è finito e A e B sono nilpotenti, allora G è risolubile. A questo proposito, è tuttora irrisolta la seguente

Congettura. *Se A e B sono gruppi finiti nilpotenti di classi α e β rispettivamente, la lunghezza derivata di $G = AB$ è limitata da una funzione f di α e β.*

Un celebre teorema di Itô asserisce che essa è vera con $f = \alpha + \beta$ per $\alpha = \beta = 1$, senza neppure supporre che i gruppi siano finiti [1], e si è a lungo ipotizzato che la funzione $f = \alpha + \beta$ fosse una buona candidata per dimostrare la congettura.

Gross ed E.Pennington l'hanno provata, con tale f, rispettivamente nel caso in cui G abbia sottogruppo di Frattini triviale e quando A e B hanno ordini coprimi.

Nel caso dei p-gruppi invece il problema è tuttora aperto, anche se, dopo la stesura di questa tesi, Cossey e Stonehewer hanno dimostrato, fornendo due controesempi, che la funzione $f = \alpha + \beta$ non può fornire una stima accettabile.

Mc Cann ha comunque dimostrato che se $G = AB$ è un p-gruppo finito, con A abeliano e B extraspeciale, allora la lunghezza derivata di G è al più 3 [2].

Tale risultato è ora un caso particolare del:

TEOREMA 1. – *Sia $G = AB$ un p-gruppo finito, tale che A è abeliano e B' ha ordine p. Allora si verifica una delle seguenti possibilità:*

i) *$A^G B'$ è il prodotto di due gruppi abeliani.*

ii) *B'^G è abeliano.*

In entambi i casi, la lunghezza derivata di G è al più 3.

Tale stima non è migliorabile in quanto si costruiscono facilmente gruppi verificanti le ipotesi del Teorema 1 e di lunghezza derivata 3.

Il teoreama precedente è generalizzabile a p-gruppi infiniti; infatti è possibile dimostrare:

TEOREMA 2. – *Sia $G = AB$ un gruppo, ove A, B sono p-gruppi tali che A è abeliano e $|B'| = p^n$, allora G è risolubile e ha lunghezza derivata al più $n + 2$.*

Utilizzando le stesse tecniche, si migliora una formula di Kazarin, il quale dimostra che se $G = AB$ è un p-gruppo finito, tale che $|A'| = p^m$ e $|B'| = p^n$, allora la lunghezza derivata di G è al più $2m + 2n + 2$ [4]. La nuova stima è:

TEOREMA 3. – *Sia $G = AB$ un p-gruppo finito, tale che $|A'| = p^m$ e $|B'| = p^n$, allora la lunghezza derivata of G è al più $2m + n + 2$.*

2. – Gruppi finiti G il cui gruppo degli automorfismi è abeliano.

Un secondo problema relativo ai gruppi finiti, lo studio del quale si riconduce ai p-gruppi, riguarda i gruppi finiti il cui gruppo degli automorfimi è abeliano. I gruppi con questa proprietà sono nilpotenti (di classe minore o uguale a 2), e quindi si ha che $G = P_1 \times \ldots \times P_r$, ove $P_1, \ldots, P_r$ sono i sottogruppi di Sylow di G, e il gruppo $\mathrm{Aut}\, G$ degli automorfismi di G è isomorfo al prodotto diretto $\mathrm{Aut}\, P_1 \times \ldots \times \mathrm{Aut}\, P_r$.

Il caso interessante è quando si suppone che il gruppo G non sia abeliano. Infatti è ben noto che il gruppo degli automorfismi di un gruppo abeliano è abeliano se e solo se il gruppo è ciclico.

Nel 1913 G.Miller ha pubblicato l'esempio di un gruppo non abeliano 3-generato di ordine 2^6 il cui gruppo degli automorfismi è abeliano di ordine 2^8. Da allora sono stati costruiti vari esempi di p-gruppi con questa proprietà, per p dispari.

Restavano tuttavia ancora irrisolte le seguenti questioni:

(a) *Qual è l'ordine del più piccolo p-gruppo non abeliano il cui gruppo degli automorfismi è abeliano?*

(b) *Qual è il minimo numero di generatori di un p-gruppo non abeliano il cui gruppo degli automorfismi è abeliano?*

B. Earnley ha dimostrato che non esistono gruppi 2-generati, nè gruppi di ordine minore o uguale a p^5 con questa proprietà [3], quindi per $p = 2$ il gruppo di Miller fornisce una risposta ad entrambe le questioni.

È possibile dimostrare che:

TEOREMA 4. – *Per p dispari, non esistono p-gruppi non abeliani di ordine p^6 il cui gruppo degli automorfismi è abeliano.*

TEOREMA 5. – *Per p dispari, non esistono p-gruppi non abeliani finiti con 3 generatori il cui gruppo degli automorfismi è abeliano.*

Inoltre, nella tesi viene costruita una famiglia di gruppi di ordine p^{n^2+3n+3} e con $2n+2$ generatori il cui gruppo degli automorfismi è abeliano, per ogni numero naturale n. Il più piccolo di essi ha ordine p^7 ed è generato da 4 elementi; tale gruppo è quindi minimale rispetto ad entrambe le richieste di (a) e (b), e chiude completamente il problema.

Recentemente Hegarty ha inoltre dimostrato che il gruppo degli automorfismi di tale gruppo, che ha ordine p^{12}, è il più piccolo p-gruppo abeliano che sia il gruppo degli automorfismi di un gruppo non abeliano.

3. – Automorfismi potenza.

Si consideri il gruppo degli automorfismi potenza $\mathrm{PAut}\, G$ di un gruppo G, cioè l'insieme degli automorfismi di G che stabilizzano ogni sottogruppo. Se G è finito di ordine $p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ e $P_1, \dots, P_r$ sono suoi p_i-sottogruppi di Sylow, si ha che $\mathrm{PAut}\, G$ è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto $\mathrm{PAut}\, P_1 \times \dots \times \mathrm{PAut}\, P_r$, ove $\mathrm{PAut}\, P_i$ è il gruppo degli automorfismi potenza di P_i, per $i = 1, \dots, r$.

È ben noto che il gruppo di automorfismi potenza di un gruppo è abeliano e normale in $\mathrm{Aut}\, G$, e anzi è un sottogruppo del gruppo degli automorfismi centrali di G. Inoltre la struttura di G e di $\mathrm{PAut}\, G$ sono strettamente legate.

Se α è un automorfismo potenza del gruppo G, per ogni $x \in G$ esiste un intero $n_{x,\alpha}$ tale che $x^\alpha = x^{n_{x,\alpha}}$. Se $n_{x,\alpha} = n_\alpha$ non dipende dalla scelta di $x \in G$ allora si dice che α è un automorfismo potenza *universale*. Se G è un p-gruppo regolare (e in particolare un gruppo abeliano lo è) ogni automorfismo potenza di G è universale. In questo caso $\mathrm{PAut}\, G$ è isomorfo ad un gruppo di automorfismi di un sottogruppo ciclico di G. Più in generale se G è un p-gruppo di classe p $\mathrm{PAut}\, G$ è abeliano elementare oppure può essere immerso in $\mathrm{Aut}\, \langle x \rangle$, per qualche sottogruppo ciclico $\langle x \rangle$ di G di ordine massimale [5].

Si può dimostrare che:

TEOREMA 6. – *Sia G un p-gruppo non abeliano finito, $A = \mathrm{PAut}\,(G)$. Se $[G, A]$ non è ciclico, allora A può essere immerso in* $\mathrm{Aut}\, \langle x \rangle$, *per qualche sottogruppo ciclico $\langle x \rangle$ di G.*

TEOREMA 7. – *Sia G un p-gruppo non abeliano finito, $A = \mathrm{PAut}\,(G) = \langle \alpha_1 \rangle \times \dots \times \langle \alpha_n \rangle$ e si supponga che $[G, A]$ sia ciclico. Se $p = 2$ si supponga inoltre che per ogni $\alpha \in A$ e per ogni $x \in G$ tale che $|x| \geq 8$ si abbia $n_{x,\alpha} \not\equiv -1 \bmod 4$. Allora $A \cong G/C_G(A)$ ed esistono $d_1, \dots, d_n \in G$ tali che $G = \langle d_1, \dots, d_n, C_G(A) \rangle$ e α_i centralizzi d_j per ogni $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.*

I 2-gruppi non considerati nella proposizione precedente sono completamente descritti, assieme ai loro gruppi di automorfismi potenza, dalla seguente proposizione.

TEOREMA 8. – *Sia G un 2-gruppo finito non abeliano, ed esistano $x \in G$ ed $\alpha \in$ PAut G tali che $|x| \geqslant 8$ e $n_{x,\alpha} \equiv -1 \bmod 4$. Fissato α, sia x di ordine massimo con questa proprietà. Allora G ha esponente 2^n, ove $2^n = |x|$, ed è il prodotto semidiretto di un gruppo abeliano N e di un gruppo ciclico $\langle y \rangle$. G è nilpotente di classe 2, G' ha esponente 2 e si ha che $g^y = g^{1+2^{n-1}}$ per ogni $g \in N$. Inoltre* PAut $G \cong$ Aut$\langle x \rangle$.

La costruzione di p-gruppi che possiedano automorfismi potenza non universali è cosa non banale, e vi sono pochi esempi significativi. I più interessanti (e quasi gli unici) sono le famiglie di gruppi descritte rispettivamente da Kovácks, Neubüser e Neumann e da Wall [6].

Wall ha costruito p-gruppi G il cui gruppo degli automorfismi potenza è abeliano elementare di rango arbitrario, per ogni numero primo p, mentre gli esempi di Kovácks, Neubüser e Neumann, hanno gruppo di automorfismi di esponente arbitrario ma rango 2.

Nessun esempio aveva gruppo degli automofismi omociclico di esponente maggiore di p. Nella tesi vengono invece presentati nuovi esempi. Nella tesi, dapprima si costruisce una famiglia di p-gruppi G il cui gruppo degli automorfismi potenza è abeliano elementare di rango arbitrario. Essi sono metabeliani, a differenza di quelli in [6] la cui lunghezza derivata aumenta all'aumentare del rango di PAut G. Poi vengono presentati due 2-gruppi G tali che PAut G è omociclico di rango 2 ed esponente 4. Essi hanno lo stesso gruppo di automorfismi potenza ma struttura diversa: uno è metabeliano, l'altro no, ma ha classe di nilpotenza minore del primo.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMBERG B.B., FRANCIOSI S. and DE GIOVANNI F.F., *Products of groups*, Oxford mathematicalmonographs. Clarendon Press, Oxford (1992).

[2] MC CANN B., *A note on the derived length of products of certain p-groups*, Proc. R. Ir. Acad., **93A** (1993), 185-187.

[3] EARNLEY B.E., *On finite groups whose group of automorphisms is abelian*, Ph.D. thesis. Wayne State University 1975. Dissertation Abstracts **36** p. 2269 B.

[4] KAZARIN L.S., *The product of two nilpotent groups*, [in Russian]. Problems in group theory and homological algebra. Yaroslavl Gos. Univ., Yaroslavl (1982), 47-49.

[5] MEIXNER T., *Power automorphisms of finite p-groups*, Israel J.,Math., **38** (1981), 345-360.

[6] WALL G.E., *Secretive prime-power groups of large rank*, Bull. Austral. Math. Soc. **12** (1975), 363-369.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: morigi@galileo.math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Federico Menegazzo.