Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Massimiliano Migliorini

Proprietà di trasversalità per il tensore di Nijenhuis di una varietà quasi complessa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 47–50.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_47_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 47-50

Proprietà di trasversalità per il tensore di Nijenhuis di una varietà quasi complessa.

MASSIMILIANO MIGLIORINI

Un oggetto centrale in alcuni recenti fondamentali sviluppi della geometria complessa è rappresentato dallo spazio delle strutture complesse (non necessariamente integrabili) come generica perturbazione di una struttura olomorfa. A esso possono essere applicati i metodi dell'analisi non lineare infinito-dimensionale e della teoria di Fredholm. In questo senso è interessante uno studio sistematico del comportamento tipico del tensore di Nijenhuis. Questa tesi si propone di gettare le basi per un tale studio. Il punto di vista che abbiamo adottato è quello di definire alcuni invarianti discreti del tensore di Nijenhuis e analizzare i luoghi in cui tali invarianti hanno valore costante. Si mostra che per una struttura generica questi luoghi sono sottovarietà lisce che definiscono una stratificazione della varietà M che si considera. Dal punto di vista algebrico-lineare il tensore di Nijenhuis di un varietà quasi complessa $(M, \mathbf{J})$ è una applicazione alternante $\mathbf{J}$-antibilineare a valori in TM. Nonostante esistano famiglie continue di tali applicazioni non GL-equivalenti è tuttavia possibile individuare alcuni invarianti discreti, ad esempio il rango. Passiamo adesso a esporre brevemente il contenuto della tesi.

Sia $(M, \mathbf{J})$ una varietà quasi complessa di dimensione $2n$. È immediato verificare che il tensore di Nijenhuis $N_{\mathbf{J}}$ soddisfa le condizioni algebriche

$$N_{\mathbf{J}}(X, Y) = -N_{\mathbf{J}}(Y, X); \qquad N_{\mathbf{J}}(X, \mathbf{J}Y) = -\mathbf{J}N_{\mathbf{J}}(X, Y) = N_{\mathbf{J}}(\mathbf{J}X, Y).$$

Si può allora definire la nozione di tensore di Nijenhuis puntuale:

DEFINIZIONE 1. – *Sia* $(V, \mathbf{J})$ *uno spazio vettoriale reale dotato di una struttura lineare complessa. Un tensore di Nijenhuis puntuale relativo alla struttura complessa* $\mathbf{J}$ *di* V *è una applicazione* $\Lambda: V \times V \to V$ *tale che*

$$\Lambda(X, Y) = -\Lambda(Y, X); \qquad \Lambda(X, \mathbf{J}Y) = -\mathbf{J}\Lambda(X, Y) = \Lambda(\mathbf{J}X, Y).$$

Quindi lo spazio dei tensori di Nijenhuis puntuali $B_{\mathbf{J}}$ relativi a $\mathbf{J}$ può essere descritto in quanto $GL(n, \mathbf{C})$-modulo, identificando $\mathbf{C}^n$ con $\mathbf{R}^{2n}$ dotato della struttura complessa standard, come

$$B_{\mathbf{J}} \sim \Lambda^2 \mathbf{C}^{n*} \otimes \overline{\mathbf{C}^n}.$$

Un primo risultato locale è il seguente:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia $\gamma \in B_{\mathbf{J}_n}$ un tensore di Nijenhuis puntuale relativo a $\mathbf{J}_n$. Esiste una struttura quasi complessa $\mathbf{J}$ su un intorno di $O \in \mathbf{R}^{2n}$ tale che*

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_n; \quad N_{\mathbf{J}_O} = \gamma .$$

È quindi possibile introdurre lo spazio dei tensori di Nijenhuis puntuali su $\mathbf{R}^{2n}$

$$N(\mathbf{R}^{2n}) = \mathbf{R}^{2n} \times GL(2n, \mathbf{R}) \times_{GL(n,\,\mathbf{C})} \Lambda^2 \mathbf{C}^{n*} \otimes \overline{\mathbf{C}^n}$$

che risulta isomorfo in modo canonico ad una sottovarietà dello spazio degli 1-jet $J^1(\mathbf{R}^{2n}, GL(2n, \mathbf{R})/GL(n, \mathbf{C}))$. Questo ci permette di costruire una applicazione a valori in $N(\mathbf{R}^{2n})$ regolare

$$\begin{array}{rclcl} \mathcal{N}\colon & J^1\left(\mathbf{R}^{2n}, \dfrac{GL(2n, \mathbf{R})}{GL(n, \mathbf{C})}\right) & \to & J^1\left(\mathbf{R}^{2n}, \dfrac{GL(2n, \mathbf{R})}{GL(n, \mathbf{C})}\right) \\ & (x, \mathbf{J}_x, \mathbf{J}_{*x}) & \mapsto & (x, \mathbf{J}_x, \widetilde{\mathcal{N}}(\mathbf{J}_{*x})) \end{array}$$

che estende l'operatore $\widetilde{\mathcal{N}}$ definito su $B_{\mathbf{J}}$ da

$$4N_{\mathbf{J}}(\gamma)(X, Y) = \gamma(X, Y) - \gamma(Y, X) - \gamma(\mathbf{J}X, \mathbf{J}Y) + \gamma(\mathbf{J}Y, \mathbf{J}X).$$

Già nel caso 6 dimensionale si presentano fenomeni interessanti ed è a questo caso che ci dedicheremo in seguito.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione 6 e sia $L(M)$ il fibrato principale dei riferimenti lineari ad essa associato. $GL(3, \mathbf{C})$ agisce a destra su $L(M)$ attraversol'immersione reale, possiamo allora definire

$$N(M) = L(M) \times_{GL(3,\,\mathbf{C})} \Lambda^2 \mathbf{C}^{3*} \otimes \overline{\mathbf{C}^3}.$$

$N(M)$ è un fibrato vettoriale complesso su $L(M)/GL(3, \mathbf{C})$ che rappresenta lo spazio di tutti i possibili tensori di Nijenhuis puntuali ed è la naturale generalizzazione ad una varietà dello spazio $N(\mathbf{R}^{2n})$.

Si osservi che ogni struttura quasi complessa $\mathbf{J}$ su M dà luogo in modo naturale ad una sezione globale di $N(M)$ espressa da $x \mapsto (x, \mathbf{J}_x, N_{\mathbf{J}_x})$.

Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base di $\mathbf{C}^3$, la base $\{T_{ij}\}_{1 \le i,j \le 3}$ di $\Lambda^2 \mathbf{C}^{3*} \otimes \overline{\mathbf{C}^3}$ definita:

$$T_{ij}(e_k, e_l) = \begin{cases} 0, & \text{se } \{i, k, l\} \neq \{1, 2, 3\} \\ sgn(\sigma)\, e_j & \text{se } \{i, k, l\} = \{1, 2, 3\}. \end{cases}, \quad sgn(\sigma) = sgn\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & k & l \end{pmatrix}$$

permette di esprimere ogni elemento di $\Lambda^2 \mathbf{C}^{3*} \otimes \overline{\mathbf{C}^3}$ come matrice in $\mathbf{C}(3)$. Inoltre l'azione di $GL(3, \mathbf{C})$ su $\Lambda^2 \mathbf{C}^{3*} \otimes \overline{\mathbf{C}^3}$ letta su $\mathbf{C}(3)$ mostra che i tensori di Nijenhuis puntuali si comportano come forme sesquilineari a valori in $\Lambda^3 \mathbf{C}^3$.

LEMMA 1. – *L'identificazione $\Lambda^2 \mathbf{C}^{3*} \otimes \overline{\mathbf{C}^3} \sim \mathbf{C}(3)$ induce una stratificazione individuata dalla segnatura e dalla dimensione del radicale delle forme sesquilineari associate che dà luogo a 100 sottovarietà di $\Lambda^2 \mathbf{C}^{3*} \otimes \overline{\mathbf{C}^3} \sim \mathbf{C}(3)$, ed una stratificazione individuata in base al rango.*

Attraverso il seguente Lemma di carattere elementare:

LEMMA 2. – *Sia $P \to M$ un fibrato principale con gruppo strutturale G. Sia $\varrho: G \to GL(V)$ una rappresentazione finito dimensionale di G, e $V = \bigcup V_i$ una stratificazione G-invariante di V (i.e. $GV_i \subset V_i$). Allora $E_\varrho = P \times_\varrho V = \bigcup P \times_\varrho V_i$ è una stratificazione del fibrato vettoriale E_ϱ.*

possiamo trasportare le stratificazioni su $N(M)$ ottenendo:

PROPOSIZIONE 2. – *La stratificazione di $\Lambda^2 \mathbf{C}^{3*} \otimes \overline{\mathbf{C}^3}$ in base alla segnatura e al radicale e quella in base al rango inducono due distinte stratificazioni di $N(M)$.*

Sia $(M, \mathbf{J})$ una varietà quasi complessa di dimensione 6 e sia $\sigma_\mathbf{J}$ la sezione di $N(M)$ indotta. Chiamiamo una struttura quasi complessa $\mathbf{J}$ trasversa ad una stratificazione di $N(M)$ se la sezione $\sigma_\mathbf{J}$ lo è.

TEOREMA 1. – *Sia M una varietà di dimensione 6. L'insieme delle strutture quasi complesse trasverse alla stratificazione di $N(M)$ in base alla segnatura è un insieme residuale e dunque denso nell'insieme di tutte le strutture quasi complesse su M. In particolare data una struttura quasi complessa su M esiste una perturbazione $\mathbf{J}_\varepsilon$ la cui sezione $\sigma_\mathbf{J}$ di $N(M)$ indotta risulta trasversa alla stratificazione in base alla segnatura.*

Con la stessa tecnica possiamo inoltre dimostrare l'analogo risultato sulla trasversalità alla stratificazione di $N(M)$ in base al rango:

TEOREMA 2. – *Sia M una varietà di dimensione 6. L'insieme delle strutture quasi complesse trasverse alla stratificazione di $N(M)$ in base al rango è un insieme residuale e dunque denso nell'insieme di tutte le strutture quasi complesse su M. In particolare data una struttura quasi complessa su M esiste una perturbazione $\mathbf{J}_\varepsilon$ la cui sezione di $\sigma_\mathbf{J}$ di $N(M)$ indotta risulta trasversa alla stratificazione in base al rango.*

Si può quindi introdurre la seguente nozione:

DEFINIZIONE 2. – *Una struttura quasi complessa $\mathbf{J}$ su una varietà M di dimensione 6 ha tensore di Nijenhuis generico se:*

$rkN_\mathbf{J} = 3$ in un aperto ed esistono delle sottovarietà R_0, R_1, R_2 di M tali che $rkN_\mathbf{J} = i$ su R_i e $R_i \subset \overline{R_{i+1}}$ per $i = 0, 1$. In particolare R_0, R_1, R_2, $M \setminus \cup_1^3 R_i$ è una stratificazione di M.

COROLLARIO 1. – *Ogni struttura quasi complessa $\mathbf{J}$ è limite di strutture quasi complesse con tensore di Nijenhuis generico.*

La caratterizzazione delle strutture quasi complesse su una varietà che sono limite di strutture totalmente non integrabili ($\mathrm{rk}\, N_J = 3$) è un problema aperto di notevole interesse. [2] contiene una discussione di alcuni risultati e metodi di dimostrazione che si applicano a queste strutture. Vediamo adesso degli esempi.

ESEMPIO 1. – *È noto che la sfera 6-dimensionale S^6 è dotata di una struttura quasi complessa canonica che può essere descritta attraverso l'identificazione dei suoi punti con gli ottetti di Cayley puramente immaginari.*

$S^6 = \{x \in U_7 \mid |x| = 1\}$. *Identificando* $T_x S^6$ *con* $V_x = \{y \in U_7 \mid \langle x, y\rangle = 0\}$ *possiamo introdurre su* S^6 *una naturale struttura complessa* **J**. *Non è difficile verificare che il tensore di Nijenhuis di questa struttura quasi complessa è*

$$\frac{1}{2} N_{\mathbf{J}_p}(x, y) = (px)\, y - p(xy) \quad \forall p \in S^6 .$$

e che per ogni $p \in S^6$ *esiste una* **C**-*base ortonormale* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *di* $T_p S^6$ *per la quale*

$$N_{\mathbf{J}_p}(v_1, v_2) = -4\mathbf{J}v_3; \qquad N_{\mathbf{J}_p}(v_2, v_3) = -4\mathbf{J}v_1; \qquad N_{\mathbf{J}_p}(v_3, v_1) = -4\mathbf{J}v_2 .$$

Questo mostra che la struttura quasi complessa **J** *è totalmente non integrabile. Questo esempio ha un'altra interessante proprietà: sia* $[N_{\mathbf{J}_p}] = (\lambda_{ij})$ *la matrice rappresentante* $N_{\mathbf{J}_p}$ *nella base* T_{ij} *relativa a* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *risulta*

$$[N_{\mathbf{J}_p}] = -4iI ,$$

ovvero la sezione individuata da **J** *in* $N(S^6)$ *è tutta contenuta in un unico strato, in particolare* $N_{\mathbf{J}}$ *è di tipo antihermitiano in ogni punto di* S^6.

Come ulteriore applicazione si ha

TEOREMA 3. – *Sia* M *una varietà Riemanniana di dimensione* 4 *sulla quale la parte autoduale del tensore di curvatura conforme non si annulli mai. Sia* Δ *il luogo discriminante di* W_+.

Se Δ *è una sottovarietà liscia di* M *allora* $R_0 = \{z \in Z(M) \mid rk(N_z) = 0\}$ *è una sottovarietà liscia di* $Z(M)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ATIYAH M.F., HITCHIN N.J. and SINGER I.M., *Self-duality in four dimensional Riemannian geometry*, Proc. R. Soc. Lond., **Ser A 362** (1978), 425-461.

[2] DE BARTOLOMEIS P., *Complex Landscapes*, Riv. Mat. Univ. Parma, **(5) 3** (1994), 109-121.

[3] DE BARTOLOMEIS P. and MIGLIORINI L. and NANNICINI A., *Propriété globales de l'espace de twisteurs*, Rend. Mat. Acc. Lincei, **2** (1991), 147-153.

[4] MIGLIORINI M., *Sottovarietà speciali dello spazio dei twistors*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **(XXVI) I-II** (1994), 239-260.

[5] MIGLIORINI M. and TOMASSINI A., *Nijenhuis tensors and Lie algebras*, Journal of Geometry and Physics, **22** (1997), 245-254.

Dipartimento di Matematica «Ulisse Dini», Università di Firenze
e-mail: max@poincare.dma.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo VIII
Direttore di Ricerca: Prof. Paolo de Bartolomeis