Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Massimiliano Mella

Contrazioni estremali e geometria n-dimensionale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 43–46.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_43_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 43-46

Contrazioni estremali e geometria n-dimensionale.

MASSIMILIANO MELLA

Introduzione.

Uno dei principali successi della scuola italiana di geometria è stato la comprensione della teoria birazionale delle superfici attraverso lo studio delle superfici minimali. Per lungo tempo un approccio simile allo studio di varietà di dimensione maggiore è sembrato irraggiungibile, ma, negli ultimi venti anni, grazie al lavoro di Kawamata, Kollár, Mori, Reid, Shokurov ed altri, è stato sviluppato un programma per la costruzione di modelli minimali in ogni dimensione usando la teoria dei raggi estremali, o teoria di Mori.

Fu S. Mori, [3], a definire e studiare per primo i raggi estremali ed i luoghi di curve razionali ad essi associati sulle varietà lisce, e ad accorgersi che tali curve potevano essere contratte con morfismi proiettivi a fibre connesse, le contrazioni estremali, per ottenere delle varietà più «semplici». Sfortunatamente tali contrazioni introducono, in modo ineluttabile, delle singolarità nelle varietà di arrivo. M. Reid, tra i primi a studiare estensivamente tali singolarità, capì quale fosse la classe necessaria per portare a termine il programma dei modelli minimali e la chiamò, appunto, terminale. La comparsa delle singolarità significò l'abbandono delle tecniche iniziali sviluppate da Mori, queste ultime poggiavano infatti, sulla teoria della deformazione di curve immerse e tale teoria è difficilmente generalizzabile a varietà singolari. Kawamata si accorse che era possibile aggirare questo problema utilizzando metodi coomologici basati su teoremi di annullamento tipo Kodaira e assieme a Kollár e Shokurov riuscirono, in una serie di articoli a dimostrare i teoremi principali anche nel contesto singolare, si veda [2] per un compendio, riducendo il problema dell'esistenza dei modelli minimali al problema dell'esistenza di particolari trasformazioni birazionali in codimensione 2 dette flip. Grazie alla descrizione completa delle singolarità terminali in dimensione 3, Mori, utilizzando una costruzione di Kawamata, riuscì a mostrare l'esistenza dei flip per le 3-varietà e completò, quindi, il programma minimale in dimensione 3.

L'impatto avuto dalla teoria dei modelli minimali sulla geometria proiettiva delle varietà di dimensione $\geqslant 3$ è stato enorme; i risultati e la filosofia che pervade tale programma hanno influenzato pesantemente sia la geometria birazionale che la geometria biregolare di tali varietà. Tra le altre anche la teoria dell'aggiunzione, ossia lo studio e la classificazione delle coppie (X, L) formate da una varietà X e da un fibrato lineare ampio L (originariamente si consideravano fibrati lineari L molto ampi e lo studio della coppia (X, L) era ricondotto allo studio di una sua sezione iperpiana utilizzando appunto la formula di aggiunzione), ha ricevuto un forte impulso dalla teoria dei raggi estremali. Iniziata dalla scuola italiana, la teoria dell'aggiunzione ha conosciuto un grosso sviluppo all'inizio degli anni '80 grazie al lavoro di Sommese, in seguito, furono Ionescu, Fujita e Wisniewski, tra i primi ad accorgersi dell'utilità della teoria di Mori nel contesto dell'aggiunzione ed anche la sua generalizzazione al caso singolare fu adattata allo studio delle varietà polarizzate da Fujita, Beltrametti-Sommese, Andreatta-Wisniewski, Andreatta.

Le nuove tecniche non permisero solo una semplificazione dei risultati ottenuti ma consentirono anche di generalizzare la teoria stessa. Già Wisniewski e Ionescu iniziarono a considerare coppie $(X, \mathcal{E})$, composte da una varietà liscia e da un fibrato vettoriale $\mathcal{E}$ ed in seguito Ye-Zhang, Fujita, Peternell, Andreatta-Ballico-Wisniewski proseguirono lungo questa nuova strada.

Nella tesi di Dottorato qui riassunta, si studiano degli aspetti della teoria birazionale e biregolare delle varietà di dimensione $\geqslant 3$, attraverso la teoria di Mori ed il programma minimale: utilizzando la teoria delle curve estremali sulle varietà lisce viene studiata la positività del fibrato aggiunto di un fibrato vettoriale di rango $n-2$ su una n-varietà, con l'approccio coomologico si caratterizzano le n-varietà terminali polarizzate con valore nef $\geqslant n-2$ e si costruisce il programma minimale-# deputato allo studio birazionale delle 3-varietà unirigate. Questi problemi sono affrontati associando, in modo canonico, all'oggetto preso in esame una contrazione estremale e studiando poi tale contrazione. Usando la tecnica di eliminazione del luogo base sviluppata da Kawamata, viene mostrato che la generica sezione del divisore fondamentale di una varietà di Mukai è liscia.

Più in dettaglio alcuni dei risultati ottenuti possono essere raccolti nelle seguenti tre aree tematiche.

Aggiunzione generalizzata.

Si consideri una coppia $(X, \mathcal{E})$ data da una n-varietà liscia ed un fibrato vettoriale $\mathcal{E}$ di rango r su X. Se $K_X + det\, \mathcal{E}$ non è nef, ossia se esistono delle curve $C \subset X$ tali che $(K_X + det\, \mathcal{E}) \cdot C < 0$, a tale coppia è naturalmente associato un morfismo a fibre connesse che contrae tali curve. Nella tesi vengono classificati tali morfismi con dimensione della fibra minima possibile e, proseguendo il lavoro iniziato Ye-Zhang, Andreatta-Ballico-Wisniewski e Zhang vengono studiate le varie nozioni di positività per la coppia $(X, \mathcal{E})$ con $rk\, \mathcal{E} = n-2$, dando una completa classificazione di tali coppie, questo lavoro è frutto di una collaborazione con Marco Andreatta ed è raccolto in [1]. Lo studio è poi esteso anche a varietà con singolarità «buone» ed in questo ambito vengono classificate le coppie (X, E), con $rkE \geqslant dim X$ e X log terminale, verificando in tal modo una congettura di Fujita, riproposta in seguito da Zhang.

3-varietà unirigate.

Sia X una 3-varietà unirigata, il programma dei modelli minimali permette di associare ad X un modello birazionale $\widetilde{X}$ che sia o una varietà di Fano, o una fibrazione in del Pezzo su una curva liscia, o un conic bundle su una superficie normale. In generale è però difficile capire quale delle tre possibilità si verifica ed è ancor più impegnativo seguire in dettaglio la mappa birazionale che lega X a $\widetilde{X}$. Il programma minimale-#, sviluppato nella tesi, è una versione modificata del programma minimale, che permette, sotto particolari ipotesi, di seguire la mappa birazionale e quindi di interpretare il risultato ottenuto. In tal modo si ottiene la classificazione birazionale delle 3-varietà immerse in $\mathbf{P}^n$ con grado $d < 2n - 4$.

TEOREMA 1. – *Sia $T_d \subset \mathbf{P}^n$ una 3-varietà non degenere di grado d. Supponiamo che $d < 2n - 4$, allora un modello minimale-# $(T^{\#}, H^{\#})$ di $(T_d, \mathcal{O}(1))$ è uno dei seguenti:*

i) $(\mathbf{P}(1, 1, 2, 3), \mathcal{O}(6))$
$((X_6 \subset \mathbf{P}(1, 1, 2, 3, a), X_6 \cap \{U_4 = 0\})$, *con* $3 \leq a \leq 5$
$(\mathbf{P}(1, 1, 1, 2, \mathcal{O}(4))$
$(X_4 \subset \mathbf{P}(1, 1, 1, 2, a), X_4 \cap \{U_4 = 0\})$, *con* $2 \leq a \leq 3$
$((X_3 \subset \mathbf{P}(1, 1, 1, 1, 2), X_3 \cap \{U_4 = 0\})$, $(X_3 \subset{}^4, \mathcal{O}(1))$
$(X_{2,2} \subset \mathbf{P}^5, \mathcal{O}(1))$

una sezione lineare della Grassmaniana che parametrizza le rette di ^{4}, *immersa in* $\mathbf{P}^9$ *con le coordinate di Plucker*
$(\mathbf{P}(1, 1, 1, 2), \mathcal{O}(1))$, *il cono sopra la superfice di Veronese.*
$(\mathbf{Q}^3, \mathcal{O}(a))$, *con* $a < 3$
$((\mathbf{P}^3, \mathcal{O}(a))$, *con* $a < 4$

ii) *un fibrato proiettivo su una curva liscia con fibre* $(F, H^{\#}_{|F}) \simeq (\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(a))$, *con* $0 < a < 3$, *o un fibrato in quadriche con al più singolarità* cA_1 *e* $H^{\#} \sim \mathcal{O}(1)$;

iii) $(\mathbf{P}(E), \mathcal{O}(1))$ *dove E è un fibrato vettoriale di rango 2 su* $\mathbf{P}^2$ *o su uno scroll razionale.*

Il Teorema può essere interpretato come la versione tridimensionale del risultato classico che una superfice non degenere $S_d \subset \mathbf{P}^n$ di grado $d \leq n - 1$ è birazionale o ad uno scroll classico razionale o a $(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(a))$,con $a \leq 2$.

Varietà di Mukai.

DEFINIZIONE 1. – *Sia X una varietà di Fano liscia di dimensione n. Diremo che X è una varietà di Mukai se* $-K_X = (n-2)H$ *per qualche divisore ampio* $H \in Pic(X)$.

Tali varietà portano questo nome in quanto Mukai, [4], le classificò assumendo che la generica sezione del divisore H fosse liscia. Usando la tecnica di Base Point Free, sviluppata da Kawamata, nella tesi viene dimostrato che tale ipotesi è sempre verificata, concludendo, in tal modo, la classificazione biregolare delle varietà di Mukai.

TEOREMA 2. – *Sia X una varietà di Mukai liscia. Allora la generica sezione S del divisore fondamentale H è liscia.*

L'idea della dimostrazione del Teorema è la seguente. Usando la tecnica di BPF di Kawamata si mostra che se S è singolare in un punto x allora esiste una sezione $S_1 \in |H|$ tale che $x \notin S_1$. D'altra parte per il Teorema di Bertini le singolarità di S devono essere contenute nel luogo base del sistema lineare $|H|$, quindi S è liscia.

Ringraziamenti.

Quelli che sono appena trascorsi sono stati anni di movimento e fors'anche di vagabondaggio, per questo il primo pensiero va a tutti coloro che durante le soste hanno saputo rifocillarmi lo spirito e rallegrarmi il corpo, primi fra tutti i miei genitori.

Nonostante non sia così grande, vi sono molte persone che hanno contribuito a creare il mio sapere matematico, Marino Palleschi, che mi ha introdotto nel mondo della geometria algebrica, Edoardo Ballico, Jarek Wisniewski; Ciro Ciliberto e Gherard Van der Geer, con i loro preziosi corsi a Cortona, Miles Reid, che ha cercato, a più riprese, di farmi entrare nel tabernacolo delle 3-varietà, Alessio Corti e più in generale tutti i matematici che ho frequentato nel corso del mio pellegrinaggio. A tutti va il mio più sincero ringraziamento.

Infine e spero lo ritenga un posto d'onore, voglio ringraziare il mio relatore Marco Andreatta, per avermi gettato nella fossa dei leoni n-dimensionali ed avermi lanciato una frusta quando era necessario.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREATTA M. e MELLA M., *Contractions on a manifold polarized by an ample vector bundle*, Trans. A.M.S., **349** (1997), 4669-4683.

[2] KAWAMATA Y., MATSUDA K. e MATSUKI K., *Introduction to the Minimal Model Program*, Algebraic Geometry, Sendai, Adv. Studies in Pure Math., Kinokuniya–North-Holland, **10** (1987), 283-360.

[3] MORI S., *Threefolds whose canonical bundles are not numerical effective*, Ann. Math., **116** (1982), 133-176.

[4] MUKAI S. *Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex 3*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **86** (1989), 3000-3002.

DPMMS Cambridge University - Cambridge CB2 1SB - UK
e-mail: mm@dpmms.cam.ac.uk
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Trento) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Marco Andreatta, Università degli Studi di Trento