Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Rosanna Galotta

Sul comportamento asintotico di superfici minimali limitate da due curve di Jordan in piani paralleli (di $\mathbb{R}^3$)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 39–42.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_39_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 39-42

Sul comportamento asintotico di superfici minimali limitate da due curve di Jordan in piani paralleli (di $\mathbf{R}^3$).

ROSANNA GALOTTA

Alla Princeton Bicentennial Conference nel 1946, Tibor Radó pose il problema di estimare il numero di superfici minimali compatte e stabili, limitate da curve di Jordan nello spazio Euclideo tridimensionale, $\mathbf{R}^3$. Noi diamo una soluzione al problema di Radó nelle ipotesi che le superfici sono embedded (cioè immerse iniettivamente) e stabili, e le curve di bordo soddisfano una naturale condizione asintotica.

Ora descriviamo i nostri risultati e metodi in più dettaglio. In questa nota, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ denotano ciascuna una collezione di curve di Jordan chiuse, liscie e disgiunte nel piano P_0: $z = 0$ di $\mathbf{R}^3$. Supponiamo che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si intersechino trasversalmente in un insieme finito di punti, che chiamiamo *crossing points*. $\mathcal{B}(t)$ denoterà la traslata verticale di $\mathcal{B}$ nel piano P_t: $z = t$. Consideriamo l'1-ciclo immerso $Z = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ in P_0, e sia $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ l'insieme delle chiusure delle componenti connesse limitate di $P_0 \setminus Z$. Sia $\mathcal{V}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ l'insieme (finito) di varifolds con molteplicità intera che possono essere rappresentate come somme di multipli interi delle componenti di $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, dove la molteplicità è 0, 1, o 2, la molteplicità cambia di uno passando da ogni componente ad una adiacente, e almeno una delle quattro componenti intorno a un crossing point ha molteplicità 0. Sia $\mathcal{S}(t)$ l'insieme di superfici minimali compatte stabili embedded limitate da $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}(t)$. Il nostro teorema principale è:

TEOREMA 1. – *Per t sufficientemente piccolo, si puó associare a ogni varifold V in $\mathcal{V}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ un'unica superficie minimale $\Sigma(V, t)$ in $\mathcal{S}(t)$. Inoltre, questa corrispondenza tra varifolds in $\mathcal{V}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e superfici in $\mathcal{S}(t)$ è una corrispondenza biunivoca.*

Per discutere più a fondo la geometria e topologia delle superfici minimali compatte stabili embedded $\Sigma(V, t)$ associate a una varifold $V \in \mathcal{V}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, diamo ora alcune definizioni. Si noti che, intorno a ciascun crossing point, Z divide un intorno circolare sufficientemente piccolo in quattro componenti connesse; ordiniamole in modo che la molteplicità della prima componente sia zero. Fissiamo una $V \in \mathcal{V}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Per le nostre ipotesi su V, solo le molteplicità $(0, 1, 0, 1)$ e $(0, 1, 2, 1)$ sono possibili per i crossing points. Ora, sia n il numero di crossing points con molteplicità $(0, 1, 0, 1)$ in $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, s il numero di componenti di V con moltepplicità uno, l il numero di componenti connesse di $Z \setminus \{\textit{crossing points}\}$, e m il numero di componenti di V con molteplicità due. Dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 2. – *Sia* $V \in \mathcal{V}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *e, per t sufficientemente piccolo, sia* $\Sigma(V, t)$ *la superficie dell'enunciato del Teorema* 1. *Allora la caratteristica di Eulero-Poincaré di* $\Sigma(V, t)$ *è* $s + n - l + 4m$. *Poiché esiste un'unica varifold* $V_0 \in \mathcal{V}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ *con* $m = 0$, *esiste un'unica* $\Sigma(V_0, t)$ *in* $\mathcal{S}(t)$ *con caratteristica di Eulero-Poincaré* $s + n - l$. *Questa superficie* $\Sigma(V_0, t)$ *è l'unica superficie di area minima in* $\mathcal{S}(t)$.

La prima parte della nostra dimostrazione del Teorema 1 consiste nel dimostrare che, per ogni fissata varifold V, esiste una superficie minimale compatta stabile embedded limitata da $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}(t)$, associata a V, per t sufficientemente piccolo. Più precisamente, dimostriamo il seguente teorema, che segue da un risultato di esistenza dovuto a W. H. Meeks III e S. T. Yau [3].

TEOREMA 3. – *Siano* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}(t)$ *due collezioni di curve liscie di Jordan chiuse e disgiunte, nei piani* P_0 *e* P_t *rispettivamente, tali che* $\mathcal{A}$ *intersechi* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0)$ *transversalmente in un numero finito di punti. Si fissi una varifold V in* $\mathcal{V}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. *Allora, per t sufficientemente piccolo, esiste una superficie minimale* $\Sigma(V, t)$ *in* $\mathcal{S}(t)$, *tale che* $\Sigma(V, t)$ *è «vicina» a V, nel senso che la famiglia di superfici minimali* $\{\Sigma(V, t)\}_t$ *converge a V, al tendere di t a* 0.

Ora descriviamo geometricamente le superfici minimali in $\mathcal{S}(t)$, generalizzando un risultato di W. Rossman [6].

TEOREMA 4. – *Supponiamo che* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}(t)$ *sia bordo di qualche superficie minimale* $\Sigma(t)$ *in* $\mathcal{S}(t)$. *Allora, per t sufficientemente vicino a* 0, *le superfici* $\Sigma(t)$ *hanno le seguenti proprietà, se* $N(i)$ *sono piccoli intorni cilindrici verticali dei crossing points*:

1. *Le componenti di* $\Sigma(t) \setminus \bigcup N(i)$ *sono grafici sulle loro proiezioni ortogonali nel piano* P_0.
2. *In* $N(i)$, $\Sigma(t)$ *è o asintoticamente elicoidale, oppure è l'unione di due grafici sul piano* P_0.

Poi dimostriamo che se una superficie minimale $\Sigma(t)$ ha una descrizione come nel Teorema 4, allora tale superficie minimale deve essere stabile, per t sufficientemente piccolo.

TEOREMA 5. – *Sia* $\Sigma(t)$ *una superficie minimale con bordo* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}(t)$. *Supponiamo che* $\Sigma(t)$ *sia descritta come nel Teorema* 4. *Allora, per t sufficientemente vicino a* 0, $\Sigma(t)$ *è stable.*

La dimostrazione del Teorema 5 segue da alcuni lemma di carattere tecnico; riportiamo qui uno sketch della dimostrazione del Teorema 5, rinviando il lettore alla tesi completa per dettagli. Un passo chiave nella dimostrazione è il seguente principio, di tipo *Bridge Principle*.

Gauss Map Bridging Principle: Sia Σ una superficie minimale, data dall'unione $\Sigma_1 \cup S \cup \Sigma_2$, e supponiamo che il primo autovalore dell'operatore di Jacobi su Σ_1 e Σ_2 sia strettamente positivo, e che S sia una superficie sufficientemente orizzontale, nel senso che il diametro della sua immagine Gaussiana è sufficientemente piccolo. Allora anche il primo autovalore dell'operatore di Jacobi sulla superficie minimale Σ è strettamente positivo.

Ci sono due differenze principali tra il Gauss Map Bridging Principle e il Bridge Principle tradizionale. Una è che, mentre nel bridge principle tradizionale il ponte deve essere molto sottile, nel nostro caso è la sua immagine Gaussiana che deve essere molto piccola in diametro. L'altra differenza è che nel bridge principle tradizionale, il ponte interseca le superfici da incollare lungo archi molto corti, mentre nel nostro caso tali archi possono essere lunghi. Comunque il pezzo di incollamento S è molto orizzontale, nel senso che la sua immagine via la mappa di Gauss ha diametro molto piccolo. Ciò ci permette di applicare delle tecniche sviluppate da N. Kapouleas in [2], e usate nella sua costruzione di superfici a curvatura media costante in $\mathbf{R}^3$. Questi risultati implicano che se si incollano due pezzi stabili E_1 e E_2 mediante un ponte sufficientemente orizzontale S, allora non sorgono campi vettoriali di Jacobi su $E_1 \cup S \cup E_2$, perché essi non sorgono su E_1 o E_2, e non ne sorgono nuovi incollando S. Nel caso corrispondente a una superficie $\Sigma(V, t)$ nel Teorema 5, cominciamo con E_1 e E_2, ciascune essendo una superficie minimale elicoidale intorno a un crossing point, e S, essendo una delle componenti quasi orizzontali di $\Sigma(t) \setminus \bigcup N(i)$ adiacenti a E_1 e E_2, è la regione che incolla E_1 a E_2. Ciò è possibile per la descrizione di $\Sigma(V, t)$ data nel Teorema 4. Una dimostrazione per induzione sul numero di componenti elicoidali (il nostro n da pagina 1) mostra che $\Sigma(V, t)$ è stabile. Ciò conclude il nostro sketch della dimostrazione del Teorema 5.

Ora diamo un breve sketch della dimostrazione del Teorema 1. Per il Teorema [3], possiamo associare a ciascuna varifold $V \in \mathcal{V}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una superficie minimale $\Sigma(V, t)$, per t sufficientemente piccolo. Il Teorema 1 afferma che $\Sigma(V, t)$ è eventualmente unica. Segue uno sketch della dimostrazione dell'unicità. Supponiamo che ci siano due successioni di superfici minimali stabili $\Sigma_1(V, t_i)$ e $\Sigma_2(V, t_i)$ che abbiano $\partial(\Sigma_1(t_i)) = \partial(\Sigma_2(t_i)) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}(t_i)$, $t_i \to 0$ se $i \to \infty$, e $\lim_{i\to\infty} \Sigma_1(V, t_i) = \lim_{i\to\infty} \Sigma_2(V, t_i) = V$. Facciamo vedere che è lecito assumere $\Sigma_1(V, t_i) \cap \Sigma_2(t_i) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}(t_i)$. Il Teorema 4 implica che, per i grande, le superfici $\Sigma_1(t_i)$ e $\Sigma_2(t_i)$ sono bordo di una regione prodotto $R(i)$ che ha angoli interni minori di π, e le superfici $\Sigma_1(t_i)$ e $\Sigma_2(t_i)$ sono ambient isotope in $R(i)$. Per un teorema di minimax dovuto a Pitts e Rubinstein [5], e generalizzato al caso di bordo non vuoto da Jost [1], esisterebbe una superficie minimale embedded *non stabile* $\Sigma^*(t_i)$ in $R(i)$, tale che $\partial(\Sigma^*(t_i)) = \partial(\Sigma_1(t_i)) = \partial(\Sigma_2(t_i)) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}(t_i)$. Poiché $\Sigma_1(t_i)$ e $\Sigma_2(t_i)$ sono espresse come grafici nel fibrato normale l'una sull'altra, e poiché possiamo verificare delle maggiorazioni sull'area, dimostriamo che, via dai crossing points, $\Sigma^*(t_i)$ è unione di grafici quasi orizzontali. Inoltre il 4π – Teorema di Nitsche [4] implica che $\Sigma^*(t_i)$ è asintoticamente elicoidale intorno ai crossing points. Quindi la superficie minimale non stabile $\Sigma^*(t_i)$ avrebbe la stessa descrizione geometrica di $\Sigma_1(t_i)$ e $\Sigma_2(t_i)$. Allora il Teorema 5 implica che, per i grande, $\Sigma^*(t_i)$ è stabile. Ciò causa una contraddizione, e finisce il nostro sketch della dimostrazione del Teorema 1.

Infine, diamo il numero esatto di superfici minimali compatte stabili embedded limitate da certe collezioni di curve. Più precisamente, dimostriamo quanto segue.

COROLLARIO 1. – *Fissato l'1-ciclo di bordo $Z = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ nel piano P_0, il numero di superfici minimali compatte stabili embedded $\Sigma(t)$ tali che $\partial(\Sigma(t)) \to Z$ se $t \to 0$, è dato da*

$$2(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k),$$

per t sufficientemente vicino a 0, dove n_i è il numero di componenti di $P_0 \backslash Z$ con molteplicità diversa da 1 e che hanno $2i$ crossing points nel loro bordo.

BIBLIOGRAFIA

[1] JOST and JÜRGEN, *Unstable Solutions of Two-Dimensional Geometric Variational Problems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **54** (1993), 205-244.

[2] KAPOULEAS and NICOLAOS, *Constant Mean Curvature Surfaces in Euclidean Three-Space*, Annals of Mathematics, **131** (1990), 239-330.

[3] MEEKS III W.H. and YAU S.T., *The Existence of Embedded Minimal Surfaces and the Problem of Uniqueness*, Mathematische Zeitschrift, **179** (1982), 151-168.

[4] NITSCHE and JOHANNES C.C., *A New Uniqueness Theorem for Minimal Surfaces*, Arch. Ration. Mech. Anal., **52** (1973), 319-329.

[5] PITTS J. and RUBINSTEIN H., *Existence of Minimal Surfaces of Bounded Topological Type in Three-Manifolds*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., **10** (1986), 163-176.

[6] ROSSMAN and WAYNE, *Constant Mean Curvature Surfaces in Euclidean and Hyperbolic 3-Space*, GANG preprint, University of Massachusetts at Amherst (1992).

Department of Mathematics and Statistics,
University of Massachusetts at Amherst, Amherst, MA 01002, USA
e-mail: galotta@math.umass.edu
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli - Federico II) - Ciclo VII
Direttore di ricerca: William H. Meeks III