BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA
Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ALESSANDRA FRABETTI

(Co)omologia delle Dialgebre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 35–38.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_35_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 35-38

(Co)omologia delle Dialgebre.

Alessandra Frabetti

1. – Introduzione.

È noto che a partire da un'algebra associativa si può definire un'algebra di Lie ponendo $[a, b] := ab - ba$. Questa corrispondenza funtoriale permette di calcolare l'omologia delle algebre di Lie $gl(A)$ delle matrici a coefficienti in un'algebra associativa unitaria A: la parte primitiva è l'omologia ciclica di A,

$$H_*^{\mathrm{Lie}}(gl(A)) \cong \bigwedge (HC_{*-1}(A)), \qquad [\text{Loday}, \ \text{Quillen}, \ \text{Tsygan}].$$

Se A ha un'involuzione, la parte primitiva dell'omologia di Lie delle matrici ortogonali o simplettiche è l'omologia diedrale $HD_{*-1}(A)$, [Loday, Procesi].

Il differenziale di Chevalley-Eilenberg sulle potenze esterne $\bigwedge^n g$ di un'algebra di Lie g può essere sollevato alle potenze tensoriali $g \otimes n$ [Loday], dando così origine ad un nuovo complesso e ad una versione non commutativa dell'omologia di Lie che viene chiamata omologia di Leibniz, e indicata con HL_*, poiché risulta essere la teoria naturale per una classe piú ampia di algebre, le *algebre di Leibniz*, il cui commutatore soddisfa la relazione di Leibniz

$$(L) \qquad [x,[y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

ma non è necessariamente antisimmetrico. Quando il commutatore è antisimmetrico le algebre di Leibniz sono algebre di Lie.

Infine, Loday ha scoperto una versione «associativa» delle algebre di Leibniz, che ha chiamato *dialgebre* [5]. Per definizione, una dialgebra D è munita di due operazioni, $\dashv$ e $\vdash$ (prodotto sinistro e destro), che soddisfano i cinque assiomi

$$(D) \qquad \begin{cases} a \dashv (b \dashv c) = (a \dashv b) \dashv c = a \dashv (b \vdash c), \\ (a \vdash b) \dashv c = a \vdash (b \dashv c), \\ (a \dashv b) \vdash c = a \vdash (b \vdash c) = (a \vdash b) \vdash c. \end{cases}$$

Queste identità sono variazioni della legge associativa, quindi le dialgebre per cui i prodotti sinistro e destro coincidono sono algebre associative. Ponendo

$$[a, b] := a \dashv b - b \vdash a$$

si definisce un commutatore di Leibniz su D, che è antisimmetrico solo se i prodotti sinistro e destro coincidono. Si ottiene dunque un diagramma commutativo di categorie e funtori

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Dig} & \longrightarrow & \mathbf{Leib} \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{Alb} & \longrightarrow & \mathbf{Lie}\,. \end{array}$$

2. – Omologia di Leibniz delle dialgebre di matrici.

La questione principale, da cui ha origine la tesi, consiste nel generalizzare il teorema di Loday-Quillen-Tsygan al contesto non commutativo. Il calcolo dell'omologia di Leibniz $HL_*(gl(D))$, delle matrici a coefficienti in una dialgebra D, ci ha portato ad introdurre l'*omologia simmetrica*, indicata con HHS_*, e a dimostrare uno dei nostri principali teoremi:

$$HL_*(gl(D)) \cong T(HHS_{*-1}(D)), \ \ [1].$$

Per un'algebra associativa unitaria A, l'omologia simmetrica è isomorfa all'omologia di Hochschild, quindi, come caso particolare, ritroviamo il teorema già noto

$$HL_*(gl(A)) \cong T(HH_{*-1}(A)), \ \ [\text{Cuvier}, \ \ \text{Loday}].$$

Nel contesto non commutativo, l'omologia simmetrica delle dialgebre ha il ruolo dell'omologia ciclica per le algebre associative. Dato che l'omologia ciclica è strettamente correlata all'omologia di Hochschild, per mezzo della lunga sequenza esatta

$$\ldots \to HH_n(A) \to HC_n(A) \to HC_{n-2}(A) \to \ldots, \ \ [\text{Connes}]$$

è naturale cercare la relazione fra l'omologia simmetrica delle dialgebre e la loro omologia «naturale».

3. – (Co)omologia delle dialgebre a coefficienti.

In [5], Loday ha introdotto l'omologia a coefficienti costanti per le dialgebre, dimostrando che è l'omologia naturale prevista dalla teoria delle operad algebriche secondo Ginzburg e Kapranov. L'ha indicata con HY_*, dal momento che il modulo delle n-catene utilizza l'insieme Y_n degli *alberi binari planari*. È evidente la necessità di introdurre una consistente teoria di omologia a coefficienti non costanti per le dialgebre. Il primo passo consiste nell'estendere il complesso «bar» di catene trovato da Loday ad un complesso di cocatene definito in modo che il secondo gruppo di coomologia classifichi le estensioni abeliane delle dialgebre,

$$HY^2(D, M) \cong \text{Ext}(D, M), \ \ [4],$$

dove M è un bimodulo qualsiasi sulla dialgebra D. Poi, per dualità, si definisce il complesso di catene di una dialgebra e la relativa omologia $HY_*(D, N)$ a coefficienti nel bimodulo non banale N. La principale difficoltà è che le categorie di «buoni» moduli di coefficienti per le teorie di coomologia e omologia *non* sono equivalenti, mentre per le algebre associative entrambe queste categorie coincidono con quella dei bimoduli. I nuovi bimoduli vengono chiamati *rappresentazioni* e *corappresentazioni*. Il più importante ingrediente della procedura di dualizzazione è l'*algebra inviluppo universale* $E(D)$ di una dialgebra D. Questo anello classifica, per costruzione, rappresentazioni e corappresentazioni di D in termini di moduli sinistri e destri su $E(D)$, e permette di introdurre il *complesso cotangente* $EY_*(D)$ di D (nella terminologia di D. Quillen per le algebre commutative), che gioca il ruolo di intermediario fra i complessi di omologia e coomologia,

$$HY^*(D, M) \cong \mathrm{Hom}_{E(D)}(EY_*(D), M) \quad \text{e} \quad HY_*(D, N) \cong N \otimes_{E(D)} EY_*(D), \; [4].$$

Come caso particolare, per $N = k$, ritroviamo il complesso bar definito da Loday. Mostriamo, inoltre, che questo complesso è aciclico sulle dialgebre munite di una *bar-unità*, la migliore nozione di unità che si può dare in una dialgebra: un elemento che è unità per i prodotti sinistro e destro solo dalla parte della barra.

4. – Omologia delle dialgebre bar-unitarie e moduli pseudo-simpliciali.

L'esistenza di una bar-unità permette di definire una struttura *pseudo-simpliciale* sul complesso di catene di una dialgebra. I moduli pseudo-simpliciali sono una generalizzazione dei moduli simpliciali che indebolsce le relazioni fra gli operatori di degenerazione. Per questo tipo di moduli si dimostrano importanti teoremi, come il teorema di Eilenberg-Zilber sull'omologia del prodotto, che permettono di definire l'*omologia normalizzata* delle dialgebre, di dimostrare l'invarianza di Morita dell'omologia di dialgebra per le matrici, e infine l'isomorfismo fra l'omologia di dialgebra e l'omologia di Hochschild per un'algebra associativa unitaria A ed un bimodulo unitario M,

$$HY_*(A, M) \cong H_*(A, M), \; [2].$$

Si mostra, inoltre, come il punto di vista classico, secondo cui l'omologia ciclica delle algebre associative è una variazione dell'omologia di Hochschild, può essere esteso al contesto delle dialgebre. Il trucco, inventato da Loday, consiste nel considerare le permutazioni come *alberi con livelli*. La mappa naturale $S_n \to Y_n$, che tralascia i livelli degli alberi, definisce una trasformazione canonica sull'omologia

$$HS_*(D) \to HY_*(D).$$

Più precisamente, dimostriamo che questa trasformazione conserva la struttura pseudo-simpliciale dei moduli di catene, e permette di estendere all'omologia simmetrica tutti i risultati dimostrati per l'omologia di dialgebra.

5. – Omologia di dialgebra come funtore derivato.

Le dialgebre non unitarie, invece, devono essere trattate con tecniche più elaborate. Per entrambe le teorie di omologia HY e HS, i moduli di catene sono somme dirette di potenze tensoriali della dialgebra. Alcune proprietà combinatoriche dell'insieme di alberi Y_n (e degli alberi con livelli, o permutazioni, S_n), permettono di definire un bicomplesso $k[Y_{p,q}]$ il cui complesso totale è il complesso originale di alberi (e analogamente per le permutazioni) [3]. Dunque, il bicomplesso di alberi orientati permetta di trovare, per *ogni* dialgebra D e ogni corappresentazione N, una sequenza spettrale

$$E^2_{pq} := H_p H_q(CY_{*,*}(D, N)) \Rightarrow HY_{p+q+1}(D, N), \ [4]$$

che converge all'omologia di dialgebra di D (e analogamente per l'omologia simmetrica di D). Questa sequenza spettrale viene usata per calcolare l'omologia di dialgebra in alcuni casi particolari di dialgebre non unitarie.

Innanzitutto, dimostriamo che l'isomorfismo fra l'omologia di dialgebra e l'omologia di Hochschild per le algebre associative si estende alla categoria delle algebre *omologicamente unitarie*, [4]. (Questo tipo di algebre, introdotto da M. Wodzicki e ampiamente studiato da J. Cuntz e D. Quillen, risolve il problema dell'eccisione per l'omologia di Hochschild e ciclica.)

In seguito, questa tecnica permette di dimostrare che il complesso cotangente di una dialgebra D è aciclico, e quindi è una risoluzione di $H_0(EY_*(D))$. Questo risultato è particolarmente importante poiché implica che l'omologia di dialgebra è un funtore derivato,

$$HY_n(D, N) \cong Tor_n^{E(D)}(N, M(D)), \ [4]$$

dove $M(D)$ è una rappresentazione di D che coincide con l'algebra stessa quando $D = A$ è un'algebra associativa.

BIBLIOGRAFIA

[1] FRABETTI A. *Leibniz homology of dialgebras of matrices*, Journ. Pure Appl. Alg. (1998), to appear.

[2] FRABETTI A., *Dialgebra homology of associative algebras*, Notes du C. R. Acad. Sci. Paris, **325** (1997), 135-140.

[3] FRABETTI A. *Simplicial properties of the set of planar binary trees*, e-preprint IRMA-Strasbourg (039-1997).

[4] FRABETTI A. *Dialgebra (co)homology with coefficients*, e-preprint IRMA-Strasbourg (040-1997).

[5] LODAY J.-L., *Algèbres ayant deux operations associatives (digèbres)*, C. R. Acad. Sci. Paris (321) (1995), 141-146.

Dipartimento di Matematica, Università di Ancona
e-mail: ale@nisba.unian.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo VIII
Direttore della Ricerca: J. L. Loday (IRMA - Strasbourg)
Coordinatore e tutore: Prof. P. Salmon