
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ANNA FINO

Geometria e topologia degli spazi omogenei

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 31–34.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_31_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_31_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria e topologia degli spazi omogenei.

ANNA FINO

1. - Introduzione.

Questa tesi è dedicata allo studio di spazi Riemanniani omogenei da due punti di vista diversi: geometrico e topologico. Tra tali spazi sono di particolare interesse gli spazi Riemanniani simmetrici, ai quali Cartan ha dato una caratterizzazione in termini differenziali mediante l'invarianza della curvatura rispetto al trasporto parallelo e una classificazione mediante lo studio del gruppo di olonomia. In generale, per una varietà Riemanniana (M^n, g) di dimensione n , la metrica g individua univocamente su M^n , mediante il trasporto parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita ∇ , un sottogruppo H di isometrie lineari di M^n , noto come gruppo di olonomia, che contiene notevoli informazioni sulla sua geometria. In tale caso si può provare che il fibrato può essere ridotto al fibrato di olonomia e si può introdurre la nozione più generale di H -struttura, (con H sottogruppo di $GL(n, \mathbf{R})$) e di H -connessione che consente di differenziare tensori sulla varietà. I possibili gruppi di olonomia H di una varietà Riemanniana orientata non simmetrica sono stati classificati da Berger [1] ed ognuno di essi determina su M una geometria di tipo particolare.

Per ogni tale gruppo H la corrispondente H -struttura può essere definita da una forma differenziale η e la geometria della varietà dotata della H -struttura è determinata da una particolare funzione, nota come torsione intrinseca. Più precisamente, data una H -connessione $\bar{\nabla}$, la torsione intrinseca (che coincide con la componente nello spazio $\mathcal{T}_-$ del tensore $A = \nabla - \bar{\nabla} \in \mathcal{T} = \mathcal{T}_+ \oplus \mathcal{T}_-$, si identifica con $\nabla\eta$ e non dipende dalla scelta di $\bar{\nabla}$.

Su uno spazio Riemanniano omogeneo $(G/H, g)$ oltre alla connessione di Levi-Civita ∇ , esistono due connessioni invarianti, note come connessioni canoniche del primo e secondo tipo introdotte da Nomizu e univocamente determinate dalla decomposizione riduttiva dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G . Nel 1958 Ambrose e Singer hanno generalizzato i risultati di Cartan sugli spazi simmetrici formulando una caratterizzazione locale delle varietà Riemanniane omogenee (M^n, g) mediante l'esistenza di un tensore, noto come struttura Riemanniana omogenea, che ha le stesse simmetrie del tensore differenza $\nabla - \tilde{\nabla}$, dove $\tilde{\nabla}$ indica la connessione canonica del secondo tipo. Una connessione che verifica le stesse simmetrie di $\tilde{\nabla}$ è nota come connessione di Ambrose-Singer.

Indicato con $\mathcal{T}$ lo spazio dei tensori aventi le stesse simmetrie di una struttura Riemanniana omogenea, Tricerri e Vanhecke [4] hanno caratterizzato le varietà Riemanniane omogenee mediante la decomposizione di tale spazio in tre componenti irriducibili $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ rispetto all'azione del gruppo ortogonale $O(n)$. Ad esempio, le condizioni $T = 0$ e $T \in \mathcal{T}_3$ individuano rispettivamente le varietà localmente simmetriche e naturalmente riduttive.

2. - Risultati topologici.

Viene studiata la topologia degli spazi omogenei compatti G/H di uguale rango (cioè con G e H dello stesso rango) e quindi, per un risultato di Samelson, degli spazi omogenei con caratteristica di Eulero non nulla; in particolare viene esaminato il caso degli spazi Riemanniani simmetrici di uguale rango. Sia M una varietà compatta e connessa di dimensione pari $2n$ e siano rispettivamente $P(t) = \sum_{j=0}^{2n} b_j t^j$, il polinomio di Poincaré di M (b_j indica il j -esimo numero di Betti) e $\chi = P(-1)$ la caratteristica di Eulero. Lo studio delle varietà iper-Kähleriane, cioè di varietà di dimensione $4k$ con gruppo di ologonia contenuto in $Sp(k)$, e delle strutture ad esse collegate [3], ha suggerito che l'invariante topologico

$$(1) \quad \phi_2(M) = \frac{P''(-1)}{2\chi} - \frac{1}{2}n^2$$

possa avere notevoli significati geometrici su cui ora brevemente ci soffermeremo. La funzione ϕ_2 è il coefficiente quadratico dello sviluppo in serie di $\log P(t)$ in -1 ed è additiva rispetto al prodotto di varietà.

In [3] è stato provato che $\phi_2(M) = -(5/6)k$, per ogni varietà iper-Kähleriana di dimensione $4k$. Utilizzando un'espressione del polinomio di Poincaré per uno spazio omogeneo G/H di uguale rango in termini degli esponenti di G e H , si prova, in contrasto con il caso iper-Kähleriano, il seguente

TEOREMA 1. - *Se M è uno spazio Riemanniano omogeneo compatto allora $\phi_2(M) \geq 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se M ammette come rivestimento un prodotto di sfere.*

Questo suggerisce che ci siano condizioni su ϕ_2 provenienti dalla curvatura. In particolare viene determinato un legame tra il valore di ϕ_2 per gli spazi Hermitiani simmetrici e la curvatura scalare dei domini simmetrici limitati associati.

Nel caso in cui G/H sia uno spazio simmetrico irriducibile e G sia di tipo A, D, E (rispetto alla classificazione di Cartan delle algebre di Lie semplici), si ha

TEOREMA 2. - *Se G/H è uno spazio Riemanniano simmetrico irriducibile e G è di tipo A, D, E , allora $\phi_2(G/H) = (1/6)(h-2)n$, dove h è il numero di Coxeter di G e $2n$ è la dimensione di G/H .*

Si noti che, sorprendentemente, ϕ_2/n dipende solo dal gruppo di Lie G in quanto h dipende solo dal gruppo di Weyl di G . La precedente formula vale anche per le rimanenti due famiglie di spazi Hermitiani simmetrici con gruppi di isometrie di tipo B e C .

Gli spazi Hermitiani simmetrici possono essere caratterizzati come spazi omogenei complessi G/H di ugual rango con l'ulteriore condizione che H sia il centralizzante di un toro in G . Borel e Hirzebruch [2] hanno stabilito un legame tra le classi caratteristiche del fibrato tangente dello spazio omogeneo complesso G/H e particola-

ri radici, note come radici positive complementari, interpretando le classi caratteristiche come funzioni simmetriche elementari in tali radici. Utilizzando la teoria delle radici positive complementari, viene esaminato questo caso più generale, trovando un'espressione semplice per il numero di Chern $\langle c_1 c_{n-1}, [G/H] \rangle$, dove $[G/H]$ indica la classe fondamentale di G/H e provando che la quantità $2\langle c_1 c_{n-1}, [G/H] \rangle / n\chi$ è limitata da $2(h-1)$, (h : numero di Coxeter di G), mentre nel caso particolare di uno spazio Hermitiano simmetrico, tale quantità coincide con h .

Gli spazi simmetrici G/H per cui H contiene un fattore $A_1 \cong SU(2)$ sono noti come gli spazi di Wolf. Nel caso in cui G sia di tipo A, D, E , viene provato il seguente

TEOREMA 3. — *Sia G/H uno spazio di Wolf di dimensione reale $2n = 4k$. Supponiamo che G sia di tipo A, D, E , rango r e numero di Coxeter h . Allora*

- (i) $k = h - 2$,
- (ii) $\phi_2(G/H) = (1/3) k^2$,
- (iii) $\chi(G/H) = N = (1/2) hr$.

La non validità di questi risultati nei casi in cui G non sia di tipo A, D, E è interpretata in termini del non annullarsi di alcuni gruppi di coomologia.

3. — Risultati geometrici.

Usando metodi algebrici di teoria delle rappresentazioni è stata determinata la decomposizione rispetto all'azione di H (per ogni possibile gruppo di olonomia H) dello spazio $\mathcal{T}_-$ dei tensori aventi le stesse simmetrie di $\nabla\eta$, ottenendo una classificazione in un numero finito di classi delle varietà dotate di H -strutture (nel caso quasi-Hermitiano si ritrovano le 16 classi di Gray e Hervella). Ad esempio, nel caso della geometria quasi-contatto si è ottenuta una classificazione delle varietà quasi-contatto in 2^{12} classi. Per ogni possibile gruppo di olonomia H , vengono inoltre trattati in dettaglio alcuni esempi.

Nel caso in cui la varietà M sia sempre dotata di una H -struttura ma sia anche H -omogenea (cioè omogenea e con il tensore η invariante rispetto al gruppo di isometrie che agisce su M) si può studiare la geometria di M definendo (come naturale generalizzazione delle strutture Riemanniane omogenee e delle strutture quasi-Hermitiane omogenee) le H -strutture omogenee, come tensori che verificano le stesse simmetrie di $\nabla - \tilde{\nabla}$, dove $\tilde{\nabla}$ in questo caso è una H -connessione. Ciò è possibile in quanto nel 1980 Kirichenko ha provato un teorema analogo a quello di Ambrose-Singer per varietà Riemanniane dotate di una struttura definita da tensori invarianti. Indicato ancora con $\mathcal{T}$ lo spazio dei tensori aventi le stesse simmetrie delle H -strutture omogenee, vengono trovate per ogni gruppo H due decomposizioni dello spazio $\mathcal{T}$ rispetto all'azione di H in componenti irriducibili. Una è conseguenza della relazione $\mathcal{T} = \mathcal{T}_+ \oplus \mathcal{T}_-$ e l'altra discende dalla decomposizione di Tricerri e Vanhecke [4].

L'esistenza di una H -struttura omogenea $T \in \mathcal{T}_+$ è equivalente alla condizione che il gruppo di olonomia di M si riduca a H . In generale su una varietà dotata di una H -struttura esiste ed è unica una connessione ∇ , nota come connessione canonica, tale che $A = \nabla - \bar{\nabla} \in \mathcal{T}_-$. Una connessione di Ambrose-Singer $\tilde{\nabla}$ su una varietà H -omogenea coincide con la connessione canonica se e solo se $A = \nabla - \tilde{\nabla} \in \mathcal{T}_-$.

Nel caso in cui M sia una varietà H -omogenea naturalmente riduttiva viene dimostrato algebricamente il seguente

TEOREMA 4. – a) Sia M una varietà H -omogenea. Se H è uno dei seguenti gruppi

$$(2) \quad U(k), U(k) \times 1, G_2, Spin(7)$$

(con le rappresentazioni naturali su $\mathbf{R}^{2k}$, $\mathbf{R}^{2k+1}$, $\mathbf{R}^7$ e $\mathbf{R}^8$) ed esiste una H -struttura omogenea $T \in \mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_3$, allora M è localmente simmetrica.

b) Su una varietà H -omogenea naturalmente riduttiva con $H = U(k)$, $U(k) \times 1$, G_2 esiste una H -struttura omogenea $T \in \mathcal{T}_-$ se e solo se M ha gruppo di olonomia debole H .

Collegando le due decomposizioni dello spazio $\mathcal{T}$ con la decomposizione dello spazio a cui appartiene $\nabla\eta$ vengono stabilite diverse proprietà geometriche. Vengono inoltre descritti per ogni caso esempi significativi. In particolare, nel caso di $H = G_2$, $Spin(7)$ vengono determinati tutti gli spazi omogenei G/K (con K sottogruppo di H) dotati di una H -struttura e con il primo numero di Betti nullo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERGER M., *Remarques sur le groupe d'holonomie des varietes riemanniennes*, CR Acad. Sci. Paris, **262** (1966), 1316-1318.
- [2] BOREL A. and HIRZEBRUCH F. *Characteristic classes and homogeneous spaces*, Amer. J. Math. Soc., **80** (1958), 459-538.
- [3] SALAMON S.M., *On the cohomology of Kähler and hyper-Kähler manifolds*, Topology, **35** (1996), 137-155.
- [4] TRICERRI F. and VANHECKE L., *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*, London Math. Soc. Lect. Notes, **83**, Cambridge University Press (1983).

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

e-mail: fino@dm.unito.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino) - Ciclo VIII

Direttore di ricerca: Prof. Simon Salamon (Università di Oxford)