Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maria Cristina Cirino Groccia

Problemi di complementazione

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 23–26.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_23_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 23-26

Problemi di complementazione.

Maria Cristina Cirino Groccia

Sia $(L, \wedge, \vee)$ un reticolo con minimo 0 e massimo 1 e sia a un elemento di L. Un elemento c di L dicesi un *complemento* di a in L se $a \wedge c = o$ e $a \vee c = 1$. Il reticolo L si dice *complementato* se ogni elemento di L ha complemento in L.

In generale, il reticolo $l(G)$ dei sottogruppi di un gruppo G nonché alcuni suoi rilevanti sottoreticoli non sono complementati. Ad esempio, se $G = \langle x \rangle$ è un gruppo ciclico d'ordine p^2 (p primo) il sottogruppo $\langle x^p \rangle$ è privo di complemento in $l(G)$ sicché $l(G) = n(G)$, dove $n(G)$ è il reticolo dei sottogruppi normali di G, non è un reticolo complementato, mentre il reticolo dei sottogruppi di un p-gruppo abeliano elementare è sempre complementato e i sottogruppi di Sylow di un gruppo risolubile finito ammettono complemento. D'altra parte, se G è un gruppo abeliano e $l(G)$ è complementato allora G è prodotto diretto di gruppi ciclici d'ordine primo, e se ogni sottogruppo di Sylow di un gruppo finito ammette complemento con il quale permuta il gruppo è risolubile. Ciò evidenzia la stretta relazione che esiste tra la struttura di un gruppo G e la proprietà che tutti i sottogruppi, o gli elementi di alcuni sottoinsiemi di $l(G)$, sono complementati.

Lo studio dei gruppi con il reticolo dei sottogruppi complementato, detti *K-gruppi*, è stato affrontato da vari autori. Una descrizione significativa dei K-gruppi risolubili è stata data da G. Zacher [13] nel caso dei gruppi finiti, da M. Emaldi [7] e F. Napolitani [9] nel caso generale, mentre per quanto concerne i gruppi non risolubili non esiste una descrizione completa dei K-gruppi. La situazione è ben definita invece per quanto riguarda i gruppi in cui certi rilevanti sottoreticoli sono complementati. In particolare, J. Wielgod [12] ha dimostrato che i gruppi in cui il reticolo dei sottogruppi normali è complementato sono esattamente i prodotti diretti di gruppi semplici e M. Curzio [5] ha provato che hanno la stessa struttura i gruppi finiti col reticolo dei sottogruppi di composizione $c(G)$ complementato. Pertanto poiché un gruppo in cui ogni sottogruppo normale è un fattore diretto è un T-gruppo, ovvero ogni sottogruppo normale di un sottogruppo normale H di G è normale in G, da tali risultati si deduce che in un gruppo finito il reticolo dei sottogruppi normali è complementato se e solo se il reticolo dei sottogruppi di composizione è complementato, e in tal caso $n(G) = c(G)$.

Un analogo risultato vale anche per i gruppi infiniti. Infatti, K. H. Toh [11] ha dimostrato che se ogni sottogruppo normale di un gruppo G ammette un complemento subnormale in $l(G)$, allora $n(G)$ è complementato, per cui in tal caso l'insieme $sn(G)$ dei sottogruppi subnormali di G coincide con $n(G)$.

DEFINIZIONE 1. – *Un sottogruppo H di un gruppo G dicesi subnormale in G se esiste un insieme $(H_i)_{i \leq n}$ di sottogruppi di G tali che $H = H_o$ H_i è un sottogruppo normale di H_{i+1} e $H_n = G$.*

Si noti che in generale ogni sottogruppo normale è subnormale mentre il viceversa non è vero. Inoltre poiché il sottogruppo generato da due sottogruppi subnormali in generale non è subnormale, $sn(G)$ non è un sottoreticolo di $l(G)$.

Dunque affinché un gruppo sia prodotto diretto di gruppi semplici è sufficiente che ogni sottogruppo normale ammetta un complemento subnormale. Si è dimostrato in [3], utilizzando l'argomento introdotto K. H. Toh e un opportuna generalizzazione ai sottogruppi ascendenti di una proprietà dei sottogruppi subnormali, che si può indebolire ulteriormente tale condizione richiedendo che ogni sottogruppo normale ammetta un complemento ascendente.

PROPOSIZIONE 1. – *Sia G un gruppo in cui ogni sottogruppo normale ammette un complemento ascendente. Allora G è prodotto diretto di gruppi semplici e quindi $n(G)$ è complementato.*

DEFINIZIONE 2. – Un sottogruppo H di un gruppo G dicesi ascendente in G se esiste un insieme $\{H_\alpha \mid \alpha \leq \varrho\}$ di sottogruppi di G indiciato con l'insieme degli ordinali minore o uguali di un ordinale ϱ, tale che $H = H_0$, H_α è un sottogruppo normale di $H_{\alpha+1}$, $H_\varrho = G$ e $H_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} H_\alpha$, per ogni ordinale limite $\beta \leq \varrho$.

È evidente che ogni sottogruppo subnormale è ascendente mentre è stato dimostrato da S. E. Stonehewer [10] che i sottogruppi quasinormali sono ascendenti. Un sottogruppo H di un gruppo G dicesi *quasinormale* in G se $HK = KH$, per ogni sottogruppo K di G. Poiché il sottogruppo generato da due sottogruppi ascendenti in G non è ascendente in G e l'intersezione di sottogruppi quasinormali in G non è quasinormale in G, l'insieme $asc(G)$ dei sottogruppi ascendenti di G e l'insieme $qn(G)$ dei sottogruppi quasinormali di G non sono dei sottoreticoli di $l(G)$. Ciò giustifica la seguente definizione.

DEFINIZIONE 3. – *Un sottoinsieme non vuoto $\mathfrak{J}$ di $l(G)$ dicesi un sottoinsieme complementato di $l(G)$ se per ogni sottogruppo H di $\mathfrak{J}$ esiste un complemento K di H in $\mathfrak{J}$.*

In particolare, se $\mathfrak{J}$ è un sottoreticolo di $l(G)$ contenente 0 e 1 , $\mathfrak{J}$ è un sottoinsieme complementato di $l(G)$ se e solo se $\mathfrak{J}$ è un reticolo complementato.

La Proposizione consente di descrivere i gruppi in cui l'insieme dei sottogruppi quasinormali è complementato.

TEOREMA 1. – *Sia G un gruppo. L'insieme $qn(G)$ dei sottogruppi quasinormali di G è un sottoinsieme complementato di $l(G)$ se e solo se G è prodotto diretto di gruppi semplici.*

Da questo teorema segue subito che in un gruppo in cui i sottogruppi quasinormali costituiscono un sottoinsieme complementato la quasinormalità e la normalità risultano concetti equivalenti. Dunque se $qn(G)$ è un sottoinsieme complementato di $l(G)$ si ha che $qn(G) = n(G) = sn(G)$. Inoltre, poiché in un prodotto diretto di gruppi strettamente semplici ogni sottogruppo ascendente ha un complemento normale (un gruppo G dicesi *strettamente semplice* se è privo di sottogruppi ascendenti non banali), dalla Proposizione si deducono i seguenti risultati.

COROLLARIO 1. – *Sia G un gruppo localmente risolubili. Allora $asc(G)$ è un sottoinsieme complementato di $l(G)$ se e solo se G è prodotto diretto di gruppi d'ordine primo.*

TEOREMA 2. – *Sia G un gruppo dotato di una serie ascendente a fattori abeliani o finitamente generati. Allora l'insieme $asc(G)$ dei sottogruppi ascendenti di G è un sottoinsieme complementato di $l(G)$ se e solo se G è prodotto diretto di gruppi strettamente semplici.*

Un sottoinsieme non vuoto $\mathfrak{J}$ di $l(G)$ dicesi un *sottoinsieme permutabilmente complementato* di $l(G)$ se per ogni sottogruppo H di $\mathfrak{J}$ esiste un complemento K di H in $\mathfrak{J}$ tale che $G = HK$.

La struttura dei gruppi in cui $l(G)$ sia permutabilmente complementato, detti *C-gruppi*, è stata definita nel caso finito da P. Hall [8] e nel caso infinito da N.V. Černikova [2] e M. Emaldi [7]. Per $sn(G)$ ovviamente l'essere permutabilmente complementato equivale all'essere complementato, mentre poiché l'insieme $asc(X)$ dei sottogruppi ascendenti di un sottogruppo X di G è un sottoinsieme permutabilmente complementato di $l(X)$ se tale è $asc(G)$, dalla Proposizione segue una caratterizzazione dei gruppi in cui $asc(G)$ è permutabilmente complementato.

TEOREMA 3. – *Sia G un gruppo. L'insieme $asc(G)$ è un sottoinsieme permutabilmente complementato di $l(G)$ se e solo se G è prodotto diretto di gruppi strettamente semplici.*

La proprietà di essere complementato è un esempio di proprietà relativa ai sottogruppi di un gruppo. In più lavori S.N. Černikov, assegnata una proprietà $\aleph$ relativa ai sottogruppi, ha studiato i gruppi in cui «molti» sottogruppi soddisfano $\aleph$ interpretando tale richiesta imponendo sia che ogni sottogruppo infinito di un gruppo abbia la proprietà $\aleph$ sia, più in generale, che l'insieme dei sottogruppi del gruppo che non hanno $\aleph$ soddisfi la condizione minimale ovvero non esistono nel gruppo catene decrescenti infinite di sottogruppi che non hanno la proprietà $\aleph$. In particolare, nell'ultima parte di [1], S.N. Černikov ha studiato i gruppi infiniti in cui ogni sottogruppo infinito ammette un complemento con il quale permuta (*IC-gruppo*) determinando condizioni affinché un IC-gruppo sia un C-gruppo, e la struttura degli IC-gruppi che non sono C-gruppi. Invece M. Emaldi [6] ha considerato i gruppi in cui ogni sottogruppo normale infinito è complementato dimostrando che per i gruppi risolubili le cui immmagini omomorfe hanno il sottogruppo di Frattini identico tale concetto è equivalente all'essere un K-gruppo. Quest'ultimo risultato è stato generalizzato ai gruppi che verificano la condizione minimale sui sottogruppi normali che non sono dotati di complemento nel reticolo di tutti i sottogruppi.

TEOREMA 4. – *Sia G un gruppo che soddisfi la condizione minimale sui sottogruppi normali non complementati e tale che* $\Phi(G/G^{(i)})=1$ *per ogni* $i \geqslant 1$. *Se esiste un intero non negativo n tale che $G^{(n)}$ è ipercentrale allora G è un K-gruppo risolubile.*

BIBLIOGRAFIA

[1] ČERNIKOV S.N., *Groups with given properties of systems of infinite subgroups*, Ukrain. Mat. Zh., **19** (1967), 111-131.

[2] ČERNIKOVA N.V., *Groups with complemented subgroups*, Amer. Math. Soc. Trasl., **17** (1961), 153-172.

[3] CIRINO GROCCIA M.C., *Groups with complemented ascendant subgroups*, Ricerche Mat., **1** (1996), 237-244.

[4] CIRINO GROCCIA M.C. e MUSELLA C., *Groups with many complemented subgruops*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, **63** (1996), 27-32.

[5] CURZIO M., *Sui sottogruppi di composizione dei gruppi finiti*, Ricerche Mat., **7** (1958), 265-288.

[6] EMALDI M., *Sugli IK-gruppi risolubili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **46** (1971), 9-13.

[7] EMALDI M., *Una nota sui gruppi risolubili complementati*, Boll. Un. Mat. Ital., **3** (1970), 858-862.

[8] HALL P., *Complemented groups*, J. London Math.Soc., **12** (1937), 201-204.

[9] NAPOLITANI F., *Sui gruppi risolubili complementati*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **38** (1967), 118-120.

[10] STONEHEWER S.E., *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), 1-16.

[11] TOH K.H., *Groups with normal subgroups possessing subnormal complements*, Proc. Amer. Math. Soc., **41** (1973), 378-380.

[12] WIEGOLD J., *On direct factors in groups*, J. London Math. Soc., **35** (1960), 310-320.

[13] ZACHER G., *Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **22** (1953), 113–122.

Indirizzo: via degli Alimena 118 - 87100 Cosenza
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli «Federico II») - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Francesco de Giovanni