Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Maddalena Bonanzinga

Alcuni risultati su proprietà di ricoprimento e sulla spezzabilità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 19–22.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_19_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 19-22

Alcuni risultati su proprietà di ricoprimento e sulla spezzabilità.

MADDALENA BONANZINGA

1. – Proprietà di tipo compatto e Lindelöf definite mediante ricoprimenti di stelle.

Se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento di uno spazio topologico X ed $A \subset X$, l'insieme $St(A, \mathcal{U}) = St^1(A, \mathcal{U}) = \cup \{U \in \mathcal{U}: U \cap A \neq \emptyset\}$ (induttivamente, $\forall n \in \omega$, $St^{n+1}(A, \mathcal{U}) = St(St^n(A, \mathcal{U}), \mathcal{U})$ è la *stella di A rispetto ad* $\mathcal{U}$. Molte importanti proprietà possono essere caratterizzate nel linguaggio delle *stelle*. In particolare, vale la seguente:

TEOREMA 1. – [2] *Uno spazio topologico di Hausdorff X è numerabilmente compatto se e solo se per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X esiste un sottoinsieme finito $F \subset X$ tale che $St(F, \mathcal{U}) = X$.*

Successivamente Matveev [3] introdusse la seguente nozione: *Uno spazio topologico X è* n-starcompatto, $n \in \omega$, *se e solo se per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X esiste un sottoinsieme finito F di X tale che $St^n(F, \mathcal{U}) = X$.* Tutte queste proprietà, al variare di n, si collocano tra la numerabile compattezza e la pseudocompattezza. Richiedendo che il sottoinsieme F sia *numerabile* invece che *finito*, Ikenaga introdusse gli spazi *n-star-Lindelöf.*

Nella tesi l'autore studia prevalentemente le proprietà 1-starcompatta e 1-star-Lindelöf, chiamandole, rispettivamente, star-compatta e star-Lindelöf e provando che, con dimostrazione simile a quella del Teorema 1, si può ottenere un risultato più forte. In particolare, introdotta la nozione di spazio centrato-compatto (centrato-Lindelöf) più debole a priori della proprietà star-compatta (star-Lindelöf), ottiene:

TEOREMA 2. – *Uno spazio Hausdorff è star-compatto se e solo se è centrato-compatto.*

L'analogo del precedente teorema per le proprietà star-Lindelöf e centrata-Lindelöf non vale: l'autore costruisce una serie di esempi di spazi di Hausdorff o di Tychonoff, centrati-Lindelöf che non sono star-Lindelöf e che soddisfano una o più proprietà aggiuntive (ad es. avere una pseudobase numerabile, debole compattezza, spazio topologico lineare, (consistentemente) normale,...). Prova poi il seguente:

TEOREMA 3. – *Uno spazio centrato-Lindelöf è star-Lindelöf se è uno dei seguenti spazi: localmente separabile; di Hausdorff, localmente compatto; GO; fortemente paraLindelöf.*

Tuttavia l'autore prova che le classi di spazi in questione sono piuttosto vicine:

TEOREMA 4. – *Ogni spazio di Tychonoff, centrato-Lindelöf può essere rappresentato come un insieme G_δ, chiuso in uno spazio di Tychonoff, star-Lindelöf.*

Le proprietà star-Lindelöf e centrata-Lindelöf possono essere naturalmente generalizzate nel linguaggio delle funzioni cardinali: *St-l* e *ct-*. Rispondendo parzialmente alla questione: *Quanto grande può essere l'extent di uno spazio di Hausdorff, star-Lindelöf* (*centrato-Lindelöf*)?, l'autore ottiene che l'extent di un tale spazio può essere uguale a 2^c e che il limite dell'extent di uno spazio di Hausdorff, *primo numerabile*, star-Lindelöf (centrato-Lindelöf) è c. Più in generale fornisce la seguente limitazione: *se X è uno spazio di Hausdorff, allora* $e(X) \leq 2^{\chi(X)\, ct\text{-}l(X)}$.

La caratterizzazione data dal Teorema ha motivato la seguente definizione [4]: Uno spazio topologico X è *acc* se per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X e per ogni sottospazio denso $D \subset X$ esiste un insieme finito $F \subset D$ tale che $St(F, \mathcal{U}) = X$. Rispetto alla star-compattezza, con tale definizione si restringe la libertà del sottoinsieme finito rispetto al quale si considera la stella. Questa proprietà si colloca strettamente tra la compattezza e la numerabile compattezza. Nella tesi, chiedendo che l'insieme F della precedente definizione sia *numerabile* invece che *finito*, l'autore introduce la classe degli spazi *a-star-Lindelöf* (che si colloca strettamente tra le proprietà di Lindelöf e star-Lindelöf) e analizza problematiche motivate dal parallelismo con gli spazi acc; in particolare, ottiene il seguente risultato:

TEOREMA 5. – *Uno spazio star-Lindelöf è a-star-Lindelöf se è uno dei seguenti spazi: con tightness numerabile; GO; ortocompatto; monotonicamente normale; almost 2-fully normal.*

L'autore prova che la proprietà a-star-Lindelöf non è ereditariamente chiusa e dimostra il seguente:

TEOREMA 6. – *Ogni spazio T_i, star-Lindelöf può essere rappresentato come un sottospazio chiuso, G_δ in uno spazio T_i, a-star-Lindelöf* ($i \in \{2, 3, 3_{\frac{1}{2}}\}$).

Poichè le principali proprietà studiate (*star-compatta, acc, hacc, star-Lindelöf, a-star-Lindelöf* e *h-cl-a-star-Lindelöf*) non si conservano nel prodotto con spazi compatti, l'autore studia condizioni sotto cui il prodotto di spazi aventi una di queste proprietà con particolari spazi compatti o di Lindelöf ha la stessa o una delle proprietà considerate. Fornisce inoltre una completa caratterizzazione di quando il prodotto di due ordinali ha una delle proprietà studiate. Infine, per quanto riguarda il prodotto infinito di spazi a-star-Lindelöf, prova il seguente risultato:

TEOREMA 7. – *Per ogni spazio T_1, non compatto X, si ha che:* (*A*) *se X non è di Lindelöf, allora $X^{\tau(X)}$ non è a-star-Lindelöf, dove $\tau(X)$ è la più piccola cardinalità di un ricoprimento aperto di X che non ha sottoricoprimenti numerabili;* (*B*) *se X è di Lindelöf, allora X^{ω_1} non è a-star-Lindelöf.*

L'autore fornisce infine il seguente esempio (ricordiamo che [4] *ogni Σ-prodotto di compatti con tightness numerabile è acc*):

ESEMPIO 1. – *Un Σ-prodotto di spazi di Hausdorff, compatti che non è a-star-Lindelöf.*

Esso si basa sul seguente fatto generale provato nella tesi: *Ogni sottospazio proprio di* D^{ω_1} *contenente due* Σ*-prodotti distinti non è a-star-Lindelöf* (D = *spazio discreto del bipunto*).

Una parte della tesi è dedicata allo studio sistematico della *conservazione* e della *riflessione* delle principali proprietà studiate attraverso classici tipi di funzioni; molti dei risultati ottenuti sono negativi ed alcuni di essi migliorano risultati noti.

L'autore considera poi due versioni relative delle proprietà n-star-Lindelöf e n-star-compatta introdotte da Matveev occupandosi del seguente problema (A): *Siano* $\mathcal{P}$ *una proprietà topologica e* (X, Z) *uno spazio* $\mathcal{P}$ *relativo. Esiste uno spazio* Y, $X \subset Y \subset Z$, *che ha la proprietà* $\mathcal{P}$? e della seguente modificazione di esso (B): *Sia* $\mathcal{Q}$ *una proprietà topologica più debole di* $\mathcal{P}$. *Supponiamo che* (X, Z) *sia uno spazio* $\mathcal{P}$ *relativo. Esiste uno spazio* Y, $X \subset Y \subset Z$, *che ha la proprietà* $\mathcal{Q}$? L'interesse verso il Problema (A) è stato motivato dal fatto che A. Dow e J. Vermeer diedero una risposta negativa a tale problema per $\mathcal{P}$ = di Lindelöf. L'autore ha fornito due esempi: il primo risponde al Problema A per $\mathcal{P}$ = 1-star-Lindelöf; il secondo risponde al Problema B per $\mathcal{P}$ = 3-star-compatta e $\mathcal{Q}$ = 3-star-Lindelöf.

2. – Spezzabilità di spazi e di funzioni.

La nozione di spezzabilità di spazi su una classe di spazi topologici fu introdotta da Arhangel'skii nel 1985. Nella formulazione più generale essa è data dalla seguente:

DEFINIZIONE 1. – [1] *Se* $\mathcal{P}$ *è una classe di spazi topologici ed* $\mathcal{M}$ *è una classe di funzioni, si dice uno spazio* X *è* $\mathcal{M}$*-spezzabile su* $\mathcal{P}$ *se per ogni* $A \subset X$ *esiste* $f \in \mathcal{M}$, $f: X \to Y$, *tale che* $Y \in \mathcal{P}$ *e* $A = f^{-1} f(A)$.

La motivazione che condusse a tale definizione fu il seguente risultato: *per ogni spazio di Tychonoff* X, *le seguenti condizioni sono equivalenti*: (i) X *ha la proprietà CFA* (= *countable functional approximation*); (ii) $\forall A \subseteq X$, *esiste una funzione continua* $f: X \to R^{\omega}$ *tale che* $f^{-1} f(A) = A$; (iii) *per ogni famiglia* $\{A_\alpha : \alpha \in 2^{\omega}\}$ *di sottoinsiemi a due a due disgiunti di* X *esiste una funzione continua* $g: X \to R^{\omega}$ *tale che* $g^{-1} g(A_\alpha) = A_\alpha$, *per ogni* $\alpha \in 2^{\omega}$.

Nella tesi vengono considerati alcuni noti tipi di spezzabilità di spazi e vengono studiati i seguenti due problemi generali per vari tipi di spezzabilità: (1) *Se uno spazio* X *è* $\mathcal{M}$ *– spezzabile su* $\mathcal{P}$, *è vero che* $X \in \mathcal{P}$?; (2) *Quando la spezzabilità di* X *su* $\mathcal{P}$ *implica l'esistenza di una iniezione continua da* X *in qualche* $Y \in \mathcal{P}$? In particolare, l'autore fornisce una risposta al problema 2 provando che, nel caso in cui la classe $\mathcal{P}$ sia $|X|$-produttiva, alcuni tipi di spezzabilità di X su $\mathcal{P}$ sono equivalenti; da questo si ottengono risultati che rispondono al problema 1 per particolari classi $\mathcal{P}$. L'autore introduce poi la *spezzabilità di funzioni su una classe* $\mathcal{P}$ *di spazi topologici*; ciò è motivato dal problema di studiare le $\mathcal{P}$*-funzioni* (introdotte da Pasynkov) quando la proprietà $\mathcal{P}$ è la spezzabilità su una classe di spazi topologici. In tal modo si estende la spezzabilità dagli spazi alle funzioni.

DEFINIZIONE 2. – *Una funzione continua* $f\colon X \to Y$ *è* $\mathcal{M}$*-spezzabile su* $\mathcal{P}$ *se* $\forall y \in Y$ *e* $\forall A \subset f^{-1}(y)$ *esistono* $Z \in \mathcal{P}$ *e* $g \in \mathcal{M}$, $g\colon X \to Z$, *tali che* $A = g^{-1}g(A)$.

In analogia alla spezzabilità di spazi, l'autore considera vari tipi di spezzabilità per le funzioni ottenendo in particolare che se la classe $\mathcal{P}$ è $|X|$-produttiva varie forme di spezzabiltà di una funzione $f\colon X \to Y$ e di X su $\mathcal{P}$ sono equivalenti. In analogia al problema 1, introduce poi il seguente problema: (3) *Se* $\mathcal{P}$ *è una proprietà topologica,* $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ *è qualche proprietà di funzioni associata a* $\mathcal{P}$ *ed* $f\colon X \to Y$ *è una funzione continua* $\mathcal{M}$*-spezzabile su* $\mathcal{P}$*, è vero che* f *è una* $\mathcal{P}$*-funzione*? (l'autore osserva che se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ sono tali che per ogni spazio X la funzione costante definita su X è una $\mathcal{P}$-funzione se e solo se X ha la proprietà $\mathcal{P}$, rispondendo negativamente al problema 1 si risponde negativamente, per lo stesso tipo di spezzabilità e la stessa classe di spazi, anche al problema 3). L'autore studia i problemi 1 e 3 per vari classi $\mathcal{P}$ ed in particolare per classi di spazi che verificano i principali assiomi di separazione ed alcune loro generalizzazioni (introducendo nuove nozioni di $\mathcal{P}$-funzioni) fornendo molte risposte positive ed i seguenti interessanti risultati:

ESEMPIO 2. – *Uno spazio* regolare *assolutamente spezzabile sulla classe degli spazi* T_{3a} *(di Tychonoff) che non è* T_{3a} *(di Tychonoff).*

– *Uno spazio assolutamente spezzabile sulla classe degli spazi* $T_{5,\varrho}$ *che non è* $T_{3,\varrho}$ *(quindi che non è* $T_{5,\varrho}$*), dove* ϱ *è un arbitrario numero ordinale.*

Infine l'autore si occupa di relativizzare alcuni tipi di spezzabilità di spazi e studia il seguente problema (*formulazione relativa* del problema 1) per particolari tipi di spezzabilità e per alcune classi $\mathcal{P}_{\text{rel}}$ di spazi relativi, introdotte da Arhangel'skii, che sono relativizzazioni dei principali assiomi di separazione: *Sia* $\mathcal{P}$ *una proprietà topologica e sia* $\mathcal{P}_{\text{rel}}$ *qualche versione relativa di* $\mathcal{P}$*. Se* (Y, X) *è uno spazio relativo* spezzabile *sulla classe* $\mathcal{P}_{\text{rel}}$ *degli spazi relativi, è vero che* (Y, X) *appartiene a* $\mathcal{P}_{\text{rel}}$?

BIBLIOGRAFIA

[1] ARHANGEL'SKII A.V., *The general concept of cleavability of a topological space*, Topol. and Appl., 44 (1992), 27-36.

[2] FLEISCHMAN W.M., *A new extension of countable compactness*, Fund. Math., **67** (1970), 1-9.

[3] MATVEEV M.V., *On properties similar to countable compactness and pseudocompactness*, Vestnik MGU, Ser. Mat., Mekh (1984), No 2, 24-27 (in Russo), Trad. Inglese: Moscow Univ. Math. Bull.

[4] MATVEEV M.V., *Absolutely countably compact spaces*, Topol. and Appl., **58** (1994), 81-92.

Dipartimento di Matematica, Università di Messina
e-mail: milena@dipmat.unime.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) – Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Filippo Cammaroto