

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

SERENA MORIGI

## Modellazione con curve e superfici p-spline

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 197–200.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1998\\_8\\_1A\\_1S\\_197\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_197_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Modellazione con curve e superfici p-spline.

SERENA MORIGI

### 1. - Introduzione.

Nell'ambito della teoria dell'approssimazione è stata recentemente considerata una nuova classe di curve spline razionali in coordinate polari introdotta da Sanchèz-Reyes in [6] e indipendentemente da de Casteljou in [3].

Due sono le categorie principali di problemi di approssimazione dove questa nuova classe di curve spline, e la loro generalizzazione a superfici, trova applicazione.

La prima riguarda problematiche di data fitting per le quali è richiesto di costruire un'approssimazione di una funzione incognita basata su un insieme di dati definiti su domini circolari e sferici.

La seconda, nell'ambito della computer aided geometric design, riguarda la modellazione geometrica di forme di natura polare e sferica mediante una rappresentazione matematica con curve e superfici.

Il lavoro di ricerca svolto si è occupato di formulare la teoria di supporto a tale classe di curve e superfici, denotate con il termine *p-spline*, mediante un approccio basato sulla relazione tra queste e le spline trigonometriche, quindi di sviluppare la seconda delle potenzialità applicative menzionate proponendo tecniche di modellazione con curve e superfici p-spline ed una loro integrazione in un sistema di progettazione geometrica assistita al calcolatore.

### 2. - Curve e superfici p-spline

DEFINIZIONE 1. - *Curva p-spline.*

Si definisce *p-spline* la curva di grado  $n$  in coordinate polari rappresentata in forma parametrica dalla seguente:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \rho(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s(t) \\ nt \end{pmatrix}$$

con  $t \in [\theta_a/n, \theta_b/n]$ ,  $s(t) = \sum_{i=-m+1}^K \delta_i M_{i,m}(\theta/n)$  funzione spline trigonometrica, e  $M_{i,m}(\theta/n)$  funzioni B-spline Trigonometriche di base.

A partire dalla definizione di curva di controllo  $G(t) = g_i(t)$  della spline trigonometrica  $s(t)$ , possiamo definire la curva di controllo della p-spline  $\mathbf{c}(t)$  come  $\mathbf{F}(t) = (1/g_i(t), nt)^T$   $i = 1, \dots, K + n$ .

Uno dei vantaggi di cui godono le p-spline è il poter essere identificate da una funzione di controllo che, al contrario delle spline trigonometriche [4], assume la

classica forma lineare a tratti. Si può dimostrare infatti che ogni tratto  $i$ -esimo della curva di controllo  $F(t)$  è, in coordinate polari, un segmento di retta di estremi i reciproci degli estremi di  $G(t)$  quindi la curva di controllo  $F(t)$  è un poligono di controllo. Questo consente di verificare per p-spline la proprietà di guscio convesso, che permette di localizzare la curva a partire dai suoi punti di controllo.

Si possono riottenere inoltre per curve p-spline altre proprietà geometriche di cui godono le spline cartesiane, quali ad esempio proprietà di controllo locale, variation diminishing ed invarianza per trasformazioni.

In [6] l'autore mostra come la classe di p-spline ristretta ad un singolo segmento, (curve  $p$ -Bèzier), rappresenti una sottoclasse di curve razionali di Bèzier in coordinate cartesiane. Da ciò si può affermare che le p-spline rappresentano una sottoclasse delle NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) [5]. Utilizzando un risultato dovuto a Koch, che mette in relazione le B-Spline Trigonometriche  $M_{i,m}$  con le spline polinomiali  $N_{i,m}$ , ed un'opportuna riparametrizzazione razionale lineare si può ottenere una rappresentazione esplicita NURBS di una curva p-spline [2].

Da questa relazione si derivano metodi di calcolo alternativi ed efficienti per ottenere alcuni utili tool di base quali knot insertion, evaluation, etc. per la modellazione con p-spline.

Una particolare attenzione viene rivolta alla rappresentazione p-spline del cerchio per la sua importanza nella definizione di superfici p-spline e si forniscono allo scopo i coefficienti del cerchio unitario rappresentato mediante p-spline di grado pari qualunque.

I risultati ottenuti per curve p-spline si estendono a superfici p-spline prodotto tensoriale  $s(u, v)$ , in coordinate sferiche, di grado  $n$  in  $u$  e  $m$  in  $v$ , utili strumento per la modellazione di oggetti di natura sferica [7]. Queste superfici p-spline possono essere rappresentate come superfici NURBS non a patch di Bèzier e godono di proprietà facilmente deducibili dallo schema a curve in precedenza considerato.

### 3. - Modellazione con curve e superfici p-spline.

Due sono gli aspetti importanti da verificare nella scelta delle p-spline quale modello di rappresentazione.

Ci chiediamo innanzitutto quale sia la classe di oggetti che possono essere rappresentati esattamente da questo particolare schema matematico.

Si è verificato a proposito che le p-spline hanno la capacità di rappresentare le coniche e le quadriche in modo esatto e le superfici a forma libera.

Inoltre, come si è visto, le p-spline hanno la proprietà di essere rappresentate come NURBS in coordinate Cartesiane. Questa proprietà consente un loro inserimento in modo naturale negli attuali sistemi CAD essendo le NURBS di fatto uno standard a livello industriale.

Il secondo aspetto riguarda la capacità di realizzare un'interfaccia utente

efficiente ed intuitiva per sfruttare appieno le potenzialità matematiche che teoricamente lo schema rappresentativo possiede.

Ci riferiamo all'abilità dell'utente di specificare e modificare una forma qualora sia nota l'esistenza teorica del modello matematico che la rappresenta.

Vengono quindi considerati proprietà e metodi utilizzati nella modellazione di forme con curve p-spline. Per affrontare il problema della modellazione con p-spline si è seguito sia l'approccio automatico, mediante tecniche di interpolazione o approssimazione di dati (data fitting), sia l'approccio interattivo, sfruttando cioè le proprietà delle p-spline come strumenti finalizzati alla manipolazione del poligono di controllo fino ad approssimare con questo la forma desiderata.

Per come sono definite le p-spline, le tecniche di interpolazione con p-spline devono garantire la positività della curva interpolante. Il problema viene impostato come problema di programmazione lineare ed è stato risolto con un metodo iterativo a più passi con ricerca dell'interpolante in spazi di dimensione crescente ad ogni iterazione.

Le tecniche di manipolazione del poligono di controllo fanno uso di tool quali knot insertion, subdivision e knot removal che sono derivati dalla procedura seguita nel generare tali curve. Mentre dalla loro definizione e rappresentazione nella base di Fourier, segue che la tecnica di degree elevation sia possibile solo per rappresentare una curva p-spline di grado  $n$  come p-spline di grado  $kn$ , con  $k$  intero positivo.

Particolare attenzione è rivolta quindi alla definizione di un algoritmo di degree elevation per p-spline di cui si presenta una formula per la determinazione esplicita dei coefficienti della curva elevata di grado [1]. L'algoritmo proposto si rivela essere efficiente, stabile e, almeno numericamente, presenta aspetti di convergenza.

L'estensione a modellazione di superfici p-spline prodotto tensoriale o superfici ad un sol valore in coordinate sferiche rappresenta una tappa obbligata verso la creazione di oggetti di natura sferica. Osserviamo come, modellare questo tipo di superfici che presentano una qualche simmetria sferica, risulti molto difficile in coordinate cartesiane e come invece risulti semplice e naturale in coordinate sfe-

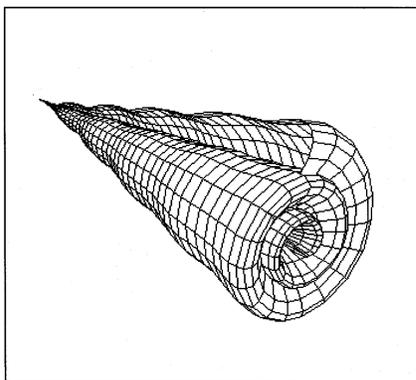


Fig. 1. - Superficie di swinging in coordinate miste polari-Cartesiane.

riche grazie ad una semplice modifica dei coefficienti secondo un pattern specificato.

Interessanti risultano gli operatori automatici che permettono di costruire superfici p-spline a partire da curve in coordinate polari. Si prendono in considerazione tecniche cross-sectional come rotazione, skinning e swinging in coordinate sferiche e in coordinate miste polari-cartesiane per modellare superfici p-spline. In figura è mostrato un esempio di modellazione con una superficie prodotta in un sistema di coordinate miste polari-cartesiane.

Questi risultati hanno portato alla naturale definizione di un ambiente di modellazione con curve e superfici p-spline mediante il quale sono stati valutati aspetti di stabilità, efficienza e flessibilità degli algoritmi presentati e sperimentate le tecniche di modellazione proposte.

L'ambiente di modellazione polare-sferico è stato quindi integrato nel sistema di modellazione di forme XCMODEL basato su primitive NURBS, al fine di aumentare le potenzialità rappresentative di quest'ultimo.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] CASCIOLA G., MORIGI S. e SANCHEZ-REYES J., *Degree elevation for p-Bézier curves*, Computer Aided Geometric Design, **15** (1998), 313-322.
- [2] CASCIOLA G. e MORIGI S., *Modelling of curves in polar and Cartesian coordinates*, in *Curves and Surfaces with Applications in CAGD*, A. Le Méhauté, C. Rabut, and L. L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville della Rivista (1997), 61-68.
- [3] DE CASTELJAU P., *Splines Focales*, in: Laurent P.J. et al. eds., *Curves and Surfaces in Geometric Design*, Peters A.K. Wellesley della Rivista (1994), 91-103.
- [4] KOCH P.E., LYCHE T., NEAMTU M. e SCHUMAKER L.L., *Control curves and knot insertion for trigonometric splines dell'articolo*, Advances in Computational Mathematics della Rivista, **3** (1995), 405-424.
- [5] PIEGL L. and TILLER W., *The Nurbs book* (monographs in visual communications), Springer (1995).
- [6] SANCHEZ-REYES J., *Single-valued curves in polar coordinates dell'articolo*, Computer Aided Design, **22**, **1** (1990), 19-26.
- [7] SANCHEZ-REYES J., *Single-valued surfaces in spherical coordinates dell'articolo*, Computer Aided Geometric Design, **11** (1994), 491-517.

Dipartimento di Matematica Università di Bologna  
e-mail: morigi@dm.unibo.it

Dottorato di ricerca in Matematica Computazionale e Informatica Matematica  
(sede amministrativa: Padova) - Cielo IX  
Direttore di ricerca: Prof. Giulio Casciola (Univ. di Bologna)