BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

NICOLETTA RIPAMONTI

Simboli di Operatori e Limite Classico della Funzione di Wigner

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 167–170.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_167_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 167-170

Simboli di Operatori e Limite Classico della Funzione di Wigner.

NICOLETTA RIPAMONTI

Come è noto, le leggi della meccanica classica conducono a contraddizioni se si cerca di applicarle a fenomeni atomici e molecolari o a processi le cui caratteristiche fisiche sono dell'ordine della costante di Planck. Per questo è stata introdotta la meccanica quantistica che contiene quella classica come caso limite. Tale limite (in gergo: *limite classico*) si realizza facendo tendere la costante di Planck a zero. Ciò è intuitivamente comprensibile dal momento che, per lo studio di oggetti di dimensione sufficientemente grande tali da poter essere governati dalle leggi della meccanica classica, la costante di Planck diventa talmente piccola da poter essere trascurata.

In generale, per formulare matematicamente le leggi della meccanica quantistica, si stabilisce una corrispondenza tra le grandezze fisiche (*osservabili classiche*) che sono funzioni regolari nello spazio delle fasi e gli operatori in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ (*osservabili quantistiche*) in modo tale che, al limite classico, il sistema dinamico quantistico coincida con quello classico. Nella costruzione concreta di tale corrispondenza che prende il nome di *rappresentazione delle regole canoniche di commutazione* si deve tener conto del fatto che per motivi empirici e di principio si ammette che i vettori di $\mathcal{H}$ rappresentino gli stati quantistici e che i valori che ogni grandezza può assumere in seguito a misura siano tutti e soli i punti dello spettro del corrispondente operatore. In questo formalismo il fenomeno della possible quantizzazione dei valori delle grandezze fisiche è conseguenza immediata del fatto che lo spettro dei corrispondenti operatori può essere, almeno in parte, discreto.

Per *quantizzazione* si intende il procedimento che associa univocamente ad ogni osservabile classica un operatore che agisce sullo spazio di Hilbert degli stati quantistici. In tal caso l'osservabile classica viene chiamata *simbolo* dell'operatore quantistico. L'esempio principale di quantizzazione è costituito dalla formula di Weyl che associa ad ogni funzione regolare nello spazio delle fasi classico un operatore pseudo-differenziale sullo spazio di Hilbert quantistico.

È noto dalla fisica teorica (si veda ad esempio il trattato «Meccanica Quantistica» di Landau e Lifschitz) che gli oggetti rilevanti al limite classico sono i prodotti scalari (in gergo: *elementi di matrice*) delle osservabili quantistiche calcolati sugli autovettori dell'operatore di Schrödinger del sistema in esame; a sua volta l'operatore di Schrödinger rappresenta la quantizzazione della funzione di Hamilton del sistema classico. In particolare se $\widehat{H}$ è l'operatore di Schrödinger che rappresenta la quantizzazione di un sistema classico, allora gli elementi di matrice

$\widehat{F}_{m,\,m+k}$ fra gli autostati di $\widehat{H}$ di un osservabile quantistica $\widehat{F}$ convergono al limite classico ai coefficienti di Fourier F_k della corrispondente osservabile classica F, qualora H sia canonicamente integrabile. Tale risultato, nel caso $k=0$, è stato dimostrato in grande generalità nella letteratura di fisica teorica con argomenti di fase stazionaria mentre i dettagli matematici completi per l'asserzione generale, valida anche per elementi di matrice al di fuori della diagonale, sono stati ottenuti solo quando H rappresenta l'oscillatore armonico.

Per studiare il limite classico degli elementi di matrice di un osservabile quantistica conviene utilizzare il formalismo della funzione di Wigner $W(p,\,q)$ (vedi [5]) a priori definita sullo spazio delle fasi R^{2n} con coordinate simplettiche $(p,\,q)$. Tale funzione consente di scrivere i prodotti scalari degli operatori quantistici $\widehat{F}$ che agiscono in $L^2(R^n)$ in funzione del loro simbolo di Weyl $F(p,\,q)$ tramite la trasformazione di Wigner

$$\langle \widehat{F}u,\, v\rangle = \int_{R^{2n}} W(p,\,q)\, F(p,\,q)\, dp\, dq\,. \tag{1}$$

Qui $(u,\,v)\in D(\widehat{F})\subset L^2(R^n)$, e la distribuzione di Wigner $W(p,\,q)\equiv W(u,\,v)(p,\,q)$ è definita come il prodotto scalare fra u e v della rappresentazione unitaria in $L^2(R^n)$ del gruppo di Heisenberg, corrispondente alla traslazione di q nello spazio delle coordinate e di p in quello duale per trasformazione di Fourier.

Al limite classico la funzione di Wigner, nel caso in cui i vettori u, v siano autovettori arbitrari di un sistema qualsiasi di n oscillatori armonici indipendenti quantizzati, converge, nel senso delle distribuzioni, alla funzione di distribuzione di Dirac supportata sulle orbite classiche. Il limite classico è definito come $\hbar\to 0$, $m_i\to\infty$, $m_i\hbar\to A_i$, $i=1,\,\dots,\,n$. Qui $m_i\in N$, $i=1,\,\dots,\,n$ è il numero quantico corrispondente all'i-esimo grado di libertà e $A_i\in R_+$, $i=1,\,\dots,\,n$ sono le variabili d'azione del sistema classico canonicamente coniugate agli angoli ϕ_i; le coordinate $(p,\,q)$ sono legate alle $(A,\,\phi)$ da una trasformazione simplettica cosicché ogni funzione (regolare) $F(p,\,q)$ nello spazio delle fasi R^{2n} può essere considerata come una funzione $F(A,\,\phi)$ su $R_+^n\times T^n$, che risulterà pertanto sviluppabile in serie di Fourier multipla.

Il risultato dimostrato in [3] si può formulare nel modo seguente:

PROPOSIZIONE 1. – *Siano f_m, f_{m+k}, $m=(m_1,\,\dots,\,m_n)$, $m+k=(m_1+k_1,\,\dots,\,m_n+k_n)$, autovettori normalizzati di un sistema di n oscillatori indipendenti corrispondenti alle n-uple di numeri quantici m e $m+k$. Allora, $\forall F(p,\,q)\in\mathcal{C}^\infty(R^{2n})$*

$$\lim_{\substack{m\to\infty,\,\hbar\to 0\\ m\hbar\to A}} \int_{R^{2n}} W(f_m,\, f_{m+k})(p,\,q)\, F(p,\,q)\, dp\, dq = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} F(A,\,\phi)\, e^{-ik\cdot\phi}\, d\phi \tag{2}$$

dove $F(A,\,\phi):=F(\sqrt{A}\,\sin\phi,\,\sqrt{A}\,\cos\phi)$.

Dalla Proposizione, in virtù della 1, segue che gli elementi di matrice di un osservabile quantistica $\langle \widehat{F} f_m, f_{m+k} \rangle$ tendono al limite classico al k-esimo coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier $F_k(A)$ dell'osservabile F sull'n-toro etichettato con A.

La formula 2 è stata dimostrata dettagliatamente utilizzando la rappresentazione di Bargmann delle relazioni canoniche di commutazione (vedi [1]), che costruisce un'immagine unitaria di $L^2(R^n)$ su uno spazio di funzioni olomorfe intere su C^n integrabili rispetto al peso naturale. L'uso di questa rappresentazione consente un'estensione immediata del risultato ai casi in cui al posto della quantizzazione usuale di Weyl si considerino quelle di Wick o anti-Wick.

Il risultato espresso dalla proposizione precedente è stato esteso al caso della quantizzazione del modello standard di geometria non euclidea del tipo di Lobachevskii fornito dal disco unitario in C con la metrica di Poincaré $ds^2 = dz\, d\bar{z}/(1 - |z|^2)$. La quantizzazione naturale di questo modello è stata ottenuta da F.A.Berezin nel lavoro [2]; essa non può essere canonica per il teorema di Weyl-Von Neumann, e pertanto già la definizione stessa della funzione di Wigner non è chiara mancando le rappresentazioni del gruppo di Heisenberg. In questo caso per risolvere il problema è stata sfruttata l'analogia fra le rappresentazioni unitarie del gruppo di Heisenberg nello spazio di Hilbert delle funzioni olomorfe su C di Bargmann e le rappresentazioni unitarie di $SU(1, 1)$ sullo spazio di Hilbert delle funzioni olomorfe sul disco unitario con la metrica di Poincaré. Con riferimento agli autovettori g_m (tutti semplici) dell'operatore di Schrödinger $\hbar z(d/dz)$, analogo all'oscillatore armonico, che agisce sullo spazio delle funzioni olomorfe sul disco unitario di quadrato sommabile rispetto alla metrica di Poincaré, considerato un osservabile $F(z, \bar{z})$ e dettane $\widehat{F}$ la sua quantizzazione, vale il seguente risultato (vedi [4]) in ognuna delle tre possibili procedure di quantizzazione: covariante, contravariante e Weyl.

Proposizione 2. – *Vale la formula*

$$\lim_{\substack{m \to \infty,\, \hbar \to 0 \\ m\hbar \to A}} \langle \widehat{F} g_m, g_{m+k} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, \phi)\, e^{-ik\cdot\phi}\, d\phi \tag{3}$$

dove (A, ϕ) *hanno significato analogo a quello della Proposizione precedente.*

Il risultato nel caso in cui $\widehat{F}$ è l'operatore di Weyl associato ad F implica in particolare che

$$\lim_{\substack{m \to \infty,\, \hbar \to 0 \\ m\hbar \to A_0}} W(g_m, g_{m+k})(A, \phi) = \delta(A - A_0)\, e^{-ik\phi} \tag{4}$$

perché anche in questo caso, come nel caso della quantizzazione canonica, si può definire la funzione di Wigner che, calcolata sulle autofunzioni dell'oscillatore armonico, può essere usata per esprimere gli elementi di matrice di un operatore $\widehat{F}$ attraverso il suo simbolo di Weyl analogamente alla 1.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARGMANN V., *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform* Commun. Pure. Appl. Math. **14** (1961), 187-214

[2] BEREZIN F.A., *General Concept of Quantization*, Comm. Math. Phys., **40** (1975), 153-174.

[3] RIPAMONTI N., *Classical limit of the harmonic oscillator Wigner functions in the Bargmann representation*, J. Phys. A: Math. Gen., **29** (1996), 5137-5151.

[4] RIPAMONTI N., *Classical Limit of the Matrix Elements on Quantized Lobachevskii Plane*, Mathematical Physics Electronic Journal **4** (1998), 1-19.

[5] WIGNER E., *On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium*, Phys. Rev., **40** (1932), 749-759.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Sandro Graffi (Dipartimento di Matematica, Università di Bologna)