Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Gianluca Gemelli

Onde di discontinuità gravitazionali in relatività generale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 163–166.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_163_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 163-166

Onde di discontinuità gravitazionali in relatività generale.

Gianluca Gemelli

1. – Introduzione.

Lo studio delle onde gravitazionali viene affrontato in letteratura per mezzo di numerosi approcci diversi, variamente interconnessi. Tra quelli che si rifanno alla teoria esatta (senza approssimazioni) della gravitazione einsteiniana possiamo citare: I) le onde di discontinuità gravitazionali (v. ad es. [4]); II) le classi di tensori di curvatura algebricamente speciali, ovvero, in una terminologia frequente: la radiazione gravitazionale (v. ad es. [3,5]). L'elenco potrebbe proseguire a lungo nominando altri contesti interessanti quali le soluzioni esatte delle equazioni di Einstein dotate di particolari simmetrie, le congruenze di linee del genere luce e la «collisione» di onde gravitazionali; tuttavia qui ci interessa in primo luogo studiare I) ed esaminare poi i collegamenti con II).

Utilizzando le tecniche di decomposizione $3+1$ dello spazio-tempo [2, 1], si può costruire una teoria generale delle onde di discontinuità gravitazionali (I), a completamento dei risultati già presenti in letteratura. Gli stessi metodi si dimostrano utili per lo studio dei seguenti problemi associati alle onde gravitazionali: la trasmissione dell'energia, le interazioni con il moto della materia, il significato delle trasformazioni di gauge. La teoria delle onde di discontinuità risulta poi estendibile in modo duale alla teoria della radiazione (II), individuando una estensione anche di quest'ultima.

2. – Onde di discontinuità gravitazionali.

Un'onda di discontinuità gravitazionale è una soluzione regolarmente discontinua delle equazioni di Einstein. Si parla di onda ordinaria oppure di onda d'urto a seconda che la discontinuità sia presente nelle sole derivate seconde o già nelle derivate prime del tensore metrico; per le onde d'urto occorre introdurre una formulazione debole delle equazioni di Einstein. In ogni caso è ben definita, in un certo dominio di spazio-tempo, una ipersuperficie regolare Σ che rappresenta l'evoluzione del fronte d'onda. Su Σ risulta inoltre definito, a meno di particolari trasformazioni dette di gauge, il tensore discontinuità metrica ∂g, il quale caratterizza il «salto» del tensore di curvatura di Riemann (o la relativa distribuzione nel caso delle onde d'urto). Tra i risultati più noti della letteratura vi è che per le onde ordinarie pure (tensore di Ricci regolare) e per le onde d'urto (qualsiasi) Σ è tangente al cono luce. Ciò corrisponde al fatto che la velocità di avanzamento dell'onda, rispetto a qualsiasi osservatore, è pari alla velocità della luce.

Introdotto un riferimento fisico, caratterizzato da un campo di versori del genere tempo u, ed il vettore isotropo l normale a Σ, da ∂g si può ottenere, per doppia proiezione, la sua componente essenziale, cioè gauge-invariante, che denotiamo $G(u)$. Tutte le proprietà note dalla letteratura riguardo alle onde ordinarie pure ed alle onde d'urto risultano discendere da poche proprietà di $G(u)$, che esprimiamo qui in coordinate x^0, x^i $(i = 1, 2, 3)$ adattate a Σ:

$$(l^k \nabla_k)\, G(u)_{ij} = 0, \qquad G(u)_k^k = 0 \qquad (l^k \nabla_k)\, \mathcal{E} = 0$$

essendo $\mathcal{E} = G(u)^{ik} G(u)_{ik}$ uno scalare invariante (in realtà indipendente da u) interpretabile come energia dell'onda gravitazionale. Infatti le diverse definizioni covarianti di energia del campo gravitazionale, dovute a Bel e Pirani, nel caso delle onde pure o d'urto, si riducono su Σ entrambe a $\mathcal{E}$.

Le proprietà di conservazione (1) sono conseguenza delle equazioni di Einstein (nella loro versione debole nel caso delle onde d'urto) e delle identità di Bianchi.

L'introduzione di un riferimento fisico consente inoltre di formulare, in modo relativo, le equazioni della dinamica delle particelle in presenza di un'onda ordinaria pura o di un'onda d'urto. Questo tipo di studio è stato oggetto di due lavori già apparsi su General Relativity and Gravitation nel corso del 1997.

Il caso delle onde ordinarie non pure, cioè in presenza di discontinuità del tensore di Ricci, in letteratura non viene mai trattato in termini della discontinuità metrica. In questo caso possiamo però ancora definire una discontinuità metrica essenziale $\mathcal{G}$ che caratterizza il salto del tensore di Riemann, che stavolta dipende anche dal salto $[R_{\alpha\beta}]$ del tensore di Ricci. Per esempio, nel caso in cui l non è isotropo, caso detto delle onde materiali, risulta: $\mathcal{G}_{ij} = 2(l \cdot l)^{-1}[R_{ij}]$. Scopriamo allora che, in corrispondenza delle leggi di conservazione (1), si hanno delle leggi di bilancio:

$$\begin{aligned} &(l^j \nabla_j)\, \mathcal{G}_{ik} - l^j \nabla_{(i} \mathcal{G}_{k)j} = 0\,, \\ (2) \qquad &(l^j \nabla_j)\, \mathcal{G}_k^k - \nabla_k \mathcal{G}_j^k\, l^j = 0\,, \\ &(l^j \nabla_j)\, E - 2\, \mathcal{G}^{ik} \nabla_i \mathcal{G}_{kj}\, l^j = 0 \end{aligned}$$

dove stavolta l'energia dell'onda $E = \mathcal{G}^{ik} \mathcal{G}_{ik}$ è uguale alla somma di un'energia puramente gravitazionale $\mathcal{E}$ e di un'energia materiale (dipendente da $[R_{\alpha\beta}]$).

3. – Radiazione gravitazionale.

La parte a traccia nulla del tensore di Riemann, che si riduce a quest'ultimo in uno spazio-tempo vuoto, si chiama tensore di Weyl; questo tensore è oggetto di una classificazione (locale) in tipi spettrali, detti di Petrov, in base a proprietà algebriche. Il tipo spettrale N viene generalmente associato al concetto di radiazione gravitazionale. Due tra le ragioni principali di questa associazione sono: a) per le onde ordinarie pure, il salto del tensore di Riemann, definito su Σ, ha le proprietà algebriche del tipo N; b) il termine dominante del tensore di Riemann, a grandi distanze da una arbitraria distribuzione di materia - energia, è del tipo N. In base ad a) si ha che la teoria della radiazione gravitazionale nel vuoto è perfettamente duale a quella delle onde ordinarie pure: essa sostituisce a risultati che, nel caso delle onde, valgono per il salto di un tensore di curvatura generico, ma solo sull'ipersuperficie Σ, analoghi risultati validi solo per una speciale classe di tensori di curvatura, ma in tutto un dominio dello spazio-tempo. In particolare, il quadro (1) si estende anch'esso al caso della radiazione, la discontinuità metrica essenziale essendo sostituita da un opportuno campo tensoriale regolare nel dominio.

Nel caso della presenza di materia, le onde gravitazionali si studiano generalmente nell'ambito delle teorie approssimate. Per quanto riguarda invece la teoria esatta, quel poco che si trova in letteratura procede per analogia col caso del vuoto, definendo la radiazione gravitazionale per mezzo dell'appartenenza del tensore di Weyl (non più coincidente con quello di Riemann) al tipo N. Tuttavia nulla di simile ad a) e b) vale nel caso della materia.

Alternativamente, se pensiamo di generalizzare a) procedendo per analogia con le onde materiali (v. sez. 2), dato che il salto del tensore di Riemann soddisfa anche in questo caso determinate condizioni algebriche ($l_{[\alpha}[R_{\beta\varrho]\sigma\nu}]=0$), siamo portati a formulare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1. – *Diciamo che il tensore di Riemann è di tipo speciale, e che definisce un campo di radiazione gravitazionale, se esiste un campo vettoriale l (non necessariamente isotropo) tale che* $l_{[\alpha}R_{\beta\varrho]\sigma\nu}=0$.

Il tipo speciale testé definito è una generalizzazione del tipo N di Petrov. La teoria della radiazione gravitazionale nella materia che si costruisce ora per naturale dualismo da quella delle onde materiali, con estensione per esempio del quadro (2), differisce da quella che si ottiene con l'ipotesi che il tensore di Weyl sia ancora del tipo N.

4. – Assorbimento ed emissione: modello geometrico.

Dato che nel vuoto le onde ordinarie sono necessariamente pure, mentre ciò non è in presenza di materia, è lecito chiedersi se, rispetto ad un'onda gravitazionale proveniente dallo spazio esterno, la materia sia «trasparente», con il che l'onda si mantiene pura, oppure se può invece generarsi un'onda materiale (con il che la velocità di avanzamento diminuirebbe bruscamente). L'ultima eventualità suggerisce la possibilità di rivelare indirettamente l'onda sfruttando l'effetto di generazione (per esempio nel Sole) di un'onda materiale, la quale si manifesta nelle variabili dinamiche e termodinamiche della materia.

Formalizziamo il modello: in un certo dominio di spazio-tempo, consideriamo un tubo d'universo $\mathcal{V}$ rappresentante l'evoluzione della materia (per esempio di una stella). Richiediamo che la discontinuità metrica (definita e regolare su Σ) sia continua su $\Sigma \cap \partial \mathcal{V}$.

Tralasciando i dettagli, si scopre che semplici ipotesi aggiuntive sulla struttura dello spazio-tempo, quali l'esistenza di un certo tipo di vettori di Killing o di Ricci-collineations, consentono la propagazione dell'onda all'interno di $\mathcal{V}$ per mezzo di un'onda materiale nel solo caso particolare in cui lo scalare di curvatura sia continuo (onde materiali singolari). Inoltre si verifica che l'appartenenza globale del tensore di Riemann al tipo speciale (v. definizione 1), tranne in un caso singolare, è condizione sufficiente affinchè l'onda trasmessa nella materia sia di tipo materiale.

BIBLIOGRAFIA

[1] FERRARESE G., *Lezioni di relatività generale*, Pitagora Ed., Bologna, (1994).

[2] JANTZEN R.T., CARINI P. and BINI D., *The mahy faces of gravitoelectromagnetism*, Ann. of Phys., **215** (1992), 1.

[3] LICHNEROWICZ A., *Ondes et radiations electromagnétiques et gravitationelles en relativité générale*, Annali di matematica, **50** (1960), 2.

[4] LICHNEROWICZ A., *Magnetohydrodynamics, waves and shock waves in curved space-time*, Kluwer, Dordrecht (1994).

[5] PIRANI F.A.E., *Survey of gravitational radiation theory*, Recent developments in General Relativity, Pergamon Press, Oxford (1962), 89.

Dipartimento di Matematica «G. Castelnuovo», Univ. degli Studi «La Sapienza», Roma
e-mail: gemelli@mat.uniroma1.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma «La Sapienza») - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. G. Ferrarese (Univ. di Roma «La Sapienza»)