BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ALESSANDRA BERTAPELLE

Il funtore di restrizione di Weil nel contesto della geometria rigido-formale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 15–18.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_15_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 15-18

Il funtore di restrizione di Weil nel contesto della geometria rigido-formale.

Alessandra Bertapelle

La tesi si propone lo studio delle proprietà e delle condizioni di rappresentabilità del funtore di restrizione di Weil nell'ambito della geometria rigida e della geometria formale. Classicamente tale funtore viene definito nel contesto degli schemi ed utilizzato per lo studio di problemi legati a cambiamenti di base. Dato un morfismo di schemi $h\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ ed uno schema $\mathcal{X}'$ sopra $\mathcal{S}'$, interessa trovare uno schema $\mathcal{Y}$ sopra $\mathcal{S}$ ed un morfismo $\phi\colon \mathcal{Y} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}' \to \mathcal{X}'$ per i quali risulti

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{T}, \mathcal{Y}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}'}(\mathcal{T} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}', \mathcal{X}'), \qquad \psi \to \phi \circ (\psi \times 1)$$

per ogni schema $\mathcal{T}$ sopra $\mathcal{S}$. Il problema non è di facile soluzione. Infatti anche se $\mathcal{X}'$ è isomorfo ad $\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}'$ per un qualche $\mathcal{S}$-schema $\mathcal{X}$, non è in generale vero che gli schemi $\mathcal{Y}$ ed $\mathcal{X}$ siano isomorfi. Infatti non è vero che ogni $\mathcal{S}'$-morfismo $\mathcal{T} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}' \to \mathcal{X}'$ discenda ad un $\mathcal{S}$-morfismo $\mathcal{T} \to \mathcal{X}$. Come controesempio si possono considerare quale h il morfismo dato da una estensione algebrica finita di campi L/K e quale $\mathcal{X}'$ la retta affine $\boldsymbol{A}^1_L$. Si avrà allora $\mathcal{Y} = \boldsymbol{A}^n_K$ dove n è il grado dell'estensione. Purtroppo non è in generale vero che tale schema $\mathcal{Y}$ esista. Si cerca, quindi, di generalizzare il problema traducendolo, in termini categoriali, in un problema di rappresentabilità del funtore

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{S}'/\mathcal{S}}(\mathcal{X}')\colon (\mathrm{Sch}/\mathcal{S})^o \to (\mathrm{Sets}) \qquad \mathcal{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}'}(\mathcal{T} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}', \mathcal{X}').$$

Nel caso un cui esista un $\mathcal{S}$-schema che lo rappresenti, tale schema viene detto la restrizione di Weil di $\mathcal{X}'$ rispetto al morfismo h. Un esempio di applicazione della restrizione di Weil si trova nel contesto delle varietà di Shimura. Essa viene introdotta nella definizione delle strutture di Hodge. In questo caso si considera $\mathcal{S} = \mathrm{Spec}\ (\boldsymbol{R})$, $\mathcal{S}' = \mathrm{Spec}\ (\boldsymbol{C})$ ed $\mathcal{X}' = \mathrm{Spec}\ (\boldsymbol{G}_m)$. Questo è un esempio molto particolare in quanto il funtore $\mathfrak{R}_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{G}_m)$ è rappresentabile e detto $\boldsymbol{S}$ lo schema che lo rappresenta $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{C}}$ può essere identificato con $\boldsymbol{G}_m \times_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{G}_m$.

I principali risultati relativi al funtore di restrizione di Weil si trovano in [1] § 7.6. Ci sono, inoltre, alcune note di Grothendieck nelle esposizioni 195 e 221 del Seminario Bourbaki. Poiché la definizione di restrizione di Weil coinvolge solo morfismi e cambi di base possiamo, senza problema, estenderla alla categoria degli spazi rigidi sopra K ed a quella degli R-schemi formali localmente di presentazione topologica finita. R indicherà sempre un anello di valutazione, completo e di altezza 1, e K il suo campo quoziente.

Gli spazi rigidi hanno assunto sempre maggiore importanza a partire dalla fine degli anni '60. La loro nascita si deve al tentativo di dare uno struttura analitica all'insieme dei punti di una curva ellittica sopra K, supposto quest'ultimo algebricamente chiuso. Tate aveva dimostrato che, nel caso in cui l'invariante della curva soddisfasse $|j| > 1$, i punti chiusi della curva corrispondevano agli elementi del quoziente $K^*/q^{\mathbf{Z}}$, dove q era un elemento di K di norma minore di 1. Questo ha una grande analogia col fatto che ogni curva ellittica su $\mathbf{C}$ è analiticamente isomorfa ad un toro del tipo $\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$ che, tramite la funzione esponenziale, può essere letto nella forma $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$ ponendo $q = e^{2\pi i\tau}$.

Il più semplice esempio di spazio rigido è dato da $\mathrm{Sp}\,(K\langle x\rangle)$. I suoi punti corrispondono agli ideali massimali dell'anello $K\langle x\rangle = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,\ a_i \in K,\ a_i \to 0\right\}$. Con Raynaud nasce poi l'idea di interpretare gli spazi rigidi quasi-separati e quasi-compatti come «fibre generiche» di schemi formali su R che siano di presentazione topologica finita. In questo modo tutte le tecniche sviluppate nei due decenni precedenti da Grothendieck possono essere utilizzate. Vi sono molteplici risultati in tale direzione tra i quali [2]. In questi lavori si cerca l'equivalente in geometria rigida di strumenti già noti e utili nel caso degli schemi. Questo perché alcuni problemi, quali l'uniformizzazione delle varietà abeliane su un campo completo non archimedeo trovano risposte qualora ci si sposti a considerare lo spazio rigido associato alle varietà abeliane in questione ([3]). Uno tra gli strumenti cui facevamo sopra riferimento è la restrizione di Weil. Essa, in particolare, permette di capire quale sia il comportamento del modello di Néron di una varietà abeliana su K rispetto ad una estensione ramificata del campo di base. Naturalmente in questo caso la valutazione su K sarà supposta discreta.

La tesi si sviluppa nel modo seguente: per primo diamo una breve introduzione agli schemi formali di presentazione topologica finita ed agli spazi rigidi. Definiamo quindi il funtore di restrizione di Weil, elencandone alcune significative proprietà. Per lo studio della sua rappresentabilità siamo costretti a considerare separatamente spazi rigidi e schemi formali. La linea in cui procediamo è però la stessa: dapprima ci restringiamo a considerare solo spazi affinoidi (risp. schemi formali affini) e poi cerchiamo di incollare quanto ottenuto localmente. Per far questo dobbiamo mostrare che il funtore di restrizione di Weil si comporta bene relativamente alle immersioni aperte. Naturalmente, non ci si può aspettare di dimostrarlo per tutti i morfismi. Ci restringiamo a considerare solo quelli propri e piatti. Se si vogliono teoremi di rappresentabilità locale dobbiamo restringerci ulteriormente a morfismi finiti e localmente liberi.

Torniamo agli schemi. Esiste una condizione per la rappresentabilità del funtore di restrizione di Weil $\mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}')$ nel caso in cui il morfismo $h\colon S' \to S$ sia finito e locamente libero. Essa può essere così espressa:

($\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}$): *Ogni insieme finito di punti è contenuto in un aperto affine.*

Per comprendere l'origine di tale proprietà immaginiamo che il funtore $\mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}')$ sia rappresentabile e che t sia un punto di un S-schema $\mathcal{T}$. La fibra di t in $\mathcal{T} \times_S S'$ è un insieme finito di punti perché abbiamo supposto h finito. La sua immagine in $\mathcal{X}'$ tramite un qualsiasi morfismo $\psi\colon \mathcal{T}\times_S S' \to \mathcal{X}'$ è contenuta in un aperto affine di $\mathcal{X}'$, indichiamolo con $\mathcal{U}$. Il morfismo ψ ristretto a $\psi^{-1}(\mathcal{U})$ induce un morfismo $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}')$, dove $\mathcal{W}$ è il più grande aperto di $\mathcal{T}$ la cui fibra in $\mathcal{T}\times_S S'$ sia interamente contenuta in $\psi^{-1}(\mathcal{U})$. Per costruzione, $\mathcal{W}$ è un intorno aperto del punto t e facendo variare il punto t in T possiamo, lavorando con incollamenti, definire un morfismo $\mathcal{T} \to \mathfrak{R}_{S'/S}(\mathcal{X}')$.

Similmente, anche la rappresentabilità del funtore di restrizione di Weil per morfismi finiti e localmente liberi di R-schemi formali è assicurata, se lo schema formale soddisfa la proprietà:

($\mathcal{P}_{\mathrm{For}}$): *Ogni insieme finito di punti è contenuto in un aperto formale affine.*

Se speriamo di generalizzare agli spazi rigidi tale proprietà con la seguente

($\mathcal{P}$): *Ogni insieme finito di punti rigidi è contenuto in un sottoinsieme aperto affinoide*

andiamo però incontro ad una delusione. Infatti i punti rigidi sono troppo pochi per poter caratterizzare condizioni «forti» dello spazio cui appartengono. Introduciamo quindi lo spazio di Zariski-Riemann $\widetilde{X}$ associato ad uno spazio rigido X_K. Esso è uno spazio topologico, in senso usuale, nel quale possiamo leggere gli aperti ammissibili dello spazio rigido quali aperti ed i ricoprimenti ammissibili quali ricoprimenti. I punti rigidi formano un insieme denso in esso per la topologia costruibile. Risultato fondamentale della tesi è la dimostrazione che la proprietà

($\mathcal{P}_{\mathrm{Rig}}$): *Ogni insieme finito di punti dello spazio di Zariski-Riemann $\widetilde{X}$ è contenuto in un aperto proveniente da un aperto affinoide dello spazio rigido X_K*

assicura la rappresentabilità del funtore di restrizione di Weil rigido, per morfismi localmente liberi e finiti.

Fin qui abbiamo considerato le categorie degli schemi, degli R-schemi formali localmente di presentazione topologica finita e degli spazi rigidi sopra K. Ci sono tre funtori che le mettono in relazione. Precisamente:

– Il funtore di completamento $(\ )^{\frown}$: esso associa ad ogni schema localmente di presentazione finita su R uno schema formale localmente di presentazione topologica finita ottenuto per completamento lungo il chiuso corrispondente all'ideale generato da $\pi \in R$. Esso fa corrispondere ad un R-schema affine di presentazione finita, indichiamolo con $\mathcal{X}_R = \mathrm{Spec}(A_R)$, lo schema formale affine $\widehat{\mathcal{X}}_R = \mathrm{Spf}(\varprojlim A_R \otimes_R R/\pi^{n+1}R)$. Topologicamente, X_R coincide con lo schema soggiacente $\mathrm{Spec}(A_R \otimes_R R/\pi R)$.

– Il GAGA funtore $(\ )^{\mathrm{an}}$ che ad ogni schema localmente di tipo finito su K (o più generalmente su una K-algebra affinoide A_K) associa uno spazio rigido su $\mathrm{Sp}(K)$ (risp. su $\mathrm{Sp}(A_K)$) avente come punti, i punti chiusi dello schema di partenza.

– Il funtore di Raynaud cui abbiamo già accennato

$$(\ )_K : (\mathrm{For}/R) \to (\mathrm{Rig}/K)$$

definito locamente come $\mathrm{Spf}(A) \to \mathrm{Sp}(A \otimes_R K)$, dove con (For/R) indichiamo la categoria degli schemi formali localmente di presentazione topologica finita su R e con (Rig/K) la categoria degli spazi rigidi sopra K.

Nella sezione 5 della tesi proponiamo un confronto tra questi funtori e quello di restrizione di Weil. Dimostriamo che esiste una buona compatibilità con i primi due ma non con il terzo. Più precisamente se $A_R \to A'_R$ è un morfismo finito e libero di R-algebre di presentazione finita ed $\mathcal{X}_R$ è uno schema localmente di presentazione finita su A'_R che soddisfa $(\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}})$, esiste un isomorfismo canonico di R-schemi formali

$$\mathfrak{R}_{A'_R/A_R}(\mathcal{X}_R)^{\wedge} \cong \mathfrak{R}_{\widehat{A}'_R/\widehat{A}_R}(\widehat{\mathcal{X}_R}).$$

Analogamente, se $A_K \to A'_K$ è un morfismo finito e libero di K-algebre affinoidi ed $\mathcal{X}_K$ è uno schema localmente di tipo finito su A'_K che soddisfa $(\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}})$, allora risulta

$$\mathfrak{R}_{A'_K/A_K}(\mathcal{X}_K)^{\mathrm{an}} \cong \mathfrak{R}_{A'_K/A_K}(\mathcal{X}_K^{\mathrm{an}}).$$

Per quanto riguarda il terzo funtore, abbiamo la rappresentabilità di $\mathfrak{R}_{S'_R/S_R}(X'_R)$ per ogni morfismo di schemi formali $S'_R \to S_R$, finito e localmente libero, ed ogni S'_R-schema formale X'_R che soddisfi $(\mathcal{P}_{\mathrm{For}})$. In queste ipotesi anche $\mathfrak{R}_{S'_K/S_K}(X'_K)$ è rappresentabile. Contrariamente a quanto accade classicamente, la fibra generica di $\mathfrak{R}_{S'_R/S_R}(X'_R)$ non coincide con $\mathfrak{R}_{S'_K/S_K}(X'_K)$ ma è isomorfa ad un sottospazio aperto di $\mathfrak{R}_{S'_K/S_K}(X'_K)$.

Nella sezione conclusiva mostriamo come il funtore di restrizione di Weil possa essere applicato allo studio di un problema di «discesa» di modelli di Néron formali.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bosch S., Lütkebohmert W. and Raynaud M., *Néron Models*, Ergebnisse der Math., 3. Folge, Bd. 21 (1990).

[2] Bosch S. and Lütkebohmert W., *Formal and rigid geometry I. Rigid spaces*, Math. Ann., **295** (1993), 403-429.

[3] Raynaud M., *Variétés Abélien et Géométrie rigide*, Actes, Congrés intern. math. Nice, t. **1** (1970), 473-477.

Math. Inst. der Universität, Münster, Germany
e-mail: bertape@math.uni-muenster.de
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. S. Bosch (Münster)