
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

SIMONETTA SALVATI

Teoremi di convergenza in teoria della misura non commutativa

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 145–148.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_145_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_145_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teoremi di convergenza in teoria della misura non commutativa.

SIMONETTA SALVATI

1. – Panoramica.

Il noto teorema di Vitali-Hahn-Saks assicura la equicontinuità di una successione di funzioni rispetto ad una fissata funzione ν , qualora ogni termine della successione sia continuo rispetto a ν e inoltre la successione converga puntualmente nel suo insieme di definizione. In altri termini, se (P) è la proprietà «essere continuo rispetto a ν », il teorema conclude che la proprietà (P) viene soddisfatta *uniformemente* dai termini della successione a patto che ogni termine «singolarmente» goda di (P) e che la successione converga puntualmente.

Da questo punto di vista il teorema di Vitali-Hahn-Saks si può descrivere come un «teorema di convergenza» ed è, per così dire, l'«antenato» dei teoremi di convergenza ottenuti nella tesi. Esso, nella sua forma classica, è utilizzato nello studio del passaggio al limite sotto il segno di integrale, ed è proprio affrontando questa tematica che R.Caccioppoli introdusse il concetto di uniforme additività ([2]), sviluppato poi da V.M. Dubrowski e F. Cafiero. Negli stessi anni (1940-50) C.E. Rickart formulò l'importante concetto di funzione «esaustiva» ([5]) che si rivelò poi ([3]) essere una generalizzazione di quello introdotto da Caccioppoli.

Nei teoremi di convergenza presentati nella tesi la «proprietà (P) » è proprio «l'essere esaustivo», dunque si considera una successione puntualmente convergente di funzioni ciascuna esaustiva e si deduce la uniforme esaustività.

Una funzione μ definita in un'algebra $\mathcal{C}$ di parti di un insieme e a valori in un gruppo topologico commutativo $\mathcal{G}$, $\mu: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ si dice **esaustiva** o **fortemente limitata** se, comunque presa $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione disgiunta in $\mathcal{C}$ (ossia $A_k \in \mathcal{C}$ e $A_k \cap A_h = \emptyset \ \forall h \neq k$) risulta $\lim_k \mu(A_k) = 0$.

A prima vista, per chi è abituato a trattare con funzioni σ -additive definite in σ -anelli, la forte limitatezza è una banale conseguenza della σ -additività. Se però ci si mette in un contesto più generale, esso rivela insospettabili aperture. Ad esempio, nel caso che la funzione sia solo finitamente additiva uno studio più approfondito rivela, come Rickart stesso sottolinea, che una funzione fortemente limitata è la naturale generalizzazione, per funzioni a valori in gruppi topologici, del concetto di funzione reale e limitata, o di funzione vettoriale a variazione limitata. Inoltre il concetto di funzione esaustiva crea un naturale collegamento tra le proprietà algebriche di una funzione finitamente additiva e la topologia del codominio.

Ricordo che $\mu: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ è **finitamente additiva** se $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ ogni volta che $A \cap B = \emptyset$.

Consideriamo dunque una successione $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni $\mu_n: \mathcal{A} \rightarrow G$ ciascuna finitamente additiva ed esaustiva.

Si dice che $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è **uniformemente esaustiva** se, per ogni $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione disgiunta in $\mathcal{A}$ risulta $\lim_k \mu_n(A_k) = 0$ uniformemente in $n \in \mathbb{N}$, ossia se, preso un intorno U di 0 in $\mathcal{G}$ si ha che $\mu_n(A_k) \in U$ da un certo indice k_0 in poi (i.e. per $k \geq k_0$) e per ogni n .

In prima approssimazione dunque la situazione è la seguente:

$\mathcal{A}$ (da specificare) $\mathcal{G}$ gruppo topologico commutativo

$\mu_n: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{G} \quad n \in \mathbb{N}$ finitamente additiva ed esaustiva

$$\lim_n \mu_n(A) = \mu_0(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (1)$$

$\Downarrow$

$\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente esaustiva

Chiameremo (1) un teorema di tipo Brooks-Jewett.

Osserviamo ora: se vogliamo dimostrare la uniforme esaustività di $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, in base alla definizione basterà considerare la matrice di termine generale $\mu_n(A_k)$ e, fissato U , determinare un indice di colonna k_0 tale che tutti i termini $\mu_n(A_k)$ con $k \geq k_0$ appartengono ad U , graficamente

$$\begin{array}{cccccc} \mu_1(A_1) & \mu_1(A_2) & \dots & \mu_1(A_{k_0}) \in U & \mu_1(A_{k_0+1}) \in U & \\ \mu_2(A_1) & \mu_2(A_2) & \dots & \mu_2(A_{k_0}) \in U & \mu_2(A_{k_0+1}) \in U & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \mu_n(A_1) & \mu_n(A_2) & \dots & \mu_n(A_{k_0}) \in U & \mu_n(A_{k_0+1}) \in U & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

gli elementi della matrice «a destra» della colonna k_0 (inclusa) sono «piccoli». Ecco dunque come il problema di dimostrare la uniforme esaustività della successione $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si riconduce ad un problema riguardante una matrice di cui ciascuna riga è una successione infinitesima (ogni μ_n è esaustiva) e ciascuna colonna è una successione convergente ($\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente su $\mathcal{A}$).

I teoremi presenti nella tesi sono in effetti tutti dimostrati con tecniche cosiddette appunto «delle matrici» o «diagonali». Tali tecniche sono state già diffusamente utilizzate sia in teoria della misura che in analisi funzionale, come si vede, ad esempio in [1], [7] e [4].

La scelta della tecnica dimostrativa «delle matrici» non è stata casuale e trova le sue ragioni nella struttura algebrica in cui le funzioni sono definite. La Teoria della Misura non commutativa trae origine infatti dagli studi di J. Von Neumann e D. Birkhoff sui fondamenti della meccanica quantistica ([8]), in cui il modello proposto da Von Neumann per lo spazio degli eventi di un sistema quantistico è

un reticolo ortomodulare, una struttura cioè non Booleana, in cui non è possibile distribuire tra l'unione e l'intersezione. Dallo schema di Von Neumann è stata elaborata una Teoria della probabilità che non ha più come punto di partenza le algebre di Boole e dunque non si inquadra nello schema di Kolmogoroff. Lo scopo della Teoria della Misura non commutativa è quello di produrre un modello abbastanza generale che possa includere come casi particolari e la Teoria della Misura utilizzata nello schema probabilistico classico e quella che interviene nello schema quantistico.

Le funzioni considerate nella tesi sono dunque definite in una struttura non Booleana, detta «quantum logic» o «poset ortomodulare». Ebbene, in questo contesto l'unico metodo dimostrativo efficiente sembra essere quello delle matrici. (È chiaro che le algebre di Boole sono un esempio particolare di «quantum logic».)

Un **poset ortomodulare (OMP)** è una struttura del tipo $(L, \leq, ', 0, 1)$ dove L è un insieme ordinato parzialmente da $\leq$, 0 ed 1 ne sono il minimo e il massimo, $': L \rightarrow L$ una applicazione di L in L , detta ortocomplemento godente delle proprietà: $a'' = a$, $a \leq b \Rightarrow b' \leq a'$, $a \wedge a'$ e $a \vee a'$ esistono e risulta $a \wedge a' = 0$ e $a \vee a' = 1$ (per ogni $a, b \in L$) e infine, vale la legge ortomodulare: se $a \leq b$ allora $b = a \vee (a' \wedge b)$.

Due elementi $a, b \in L$ si dicono **ortogonali** se $a \leq b'$.

Se L è in particolare un'algebra $\mathcal{A}$ di insiemi, due elementi di $\mathcal{A}$ sono ortogonali se e solo se sono disgiunti e dunque è chiaro come le nozioni di forte limitatezza e di finita additività si possano dare per una funzione definita in un poset; basterà considerare elementi ortogonali invece che disgiunti.

Dunque, nel teorema (1) l'algebra $\mathcal{A}$ va sostituita con un poset ortomodulare L .

Occorre a questo punto sottolineare che un teorema del tipo (1) non vale se $\mathcal{A}$ è un anello Booleano (e dunque, a maggior ragione, se è un poset ortomodulare): da questa constatazione è scaturita negli ultimi 20 anni una ricerca su quali condizioni imponesse ad un anello perché un teorema di tipo Brooks-Jewett valga. (cfr. [9] e [6]).

La **subsequential interpolation property (SIP)** e la **(subsequential completeness property (SCP))** sono attualmente le più accreditate.

Le funzioni considerate nella tesi sono dunque definite in un OMP godente della SIP o della SCP. Per questioni di spazio non mi è possibile soffermarmi sulla SIP e sulla SCP.

2. - I risultati.

TEOREMA 1. - *Siano L un OMP con la SIP e $\mathcal{G}$ un gruppo topologico commutativo.*

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mu_n: L \rightarrow \mathcal{G}$ finitamente additiva ed esaustiva.

Se per ogni $a \in L$ risulta $\lim_n \mu_n(a) = \mu(a)$, allora $\{\mu_n: n \in \mathbb{N}\}$ è uniformemente esaustivo e μ è esaustiva.

TEOREMA 2. - *Sia L un OMP con la SCP e $k \geq 1$.*

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mu_n: L \rightarrow [0, \infty[$.

Supponiamo μ_n esaustiva e tale che

$$|\mu_n(b) - \mu_n(a)| \leq k\mu_n(b \wedge a') \quad \text{se } a \leq b$$

Se $\mu: L \rightarrow [0, \infty[$ è una funzione esaustiva e tale che $\lim_n \mu_n(a) = \mu(a)$ per ogni $a \in L$, allora $\{\mu_n: n \in \mathbb{N}\}$ è uniformemente esaustivo e μ è k -triangolare.

Si tratta di un teorema di tipo Brooks-Jewett per una speciale classe di funzioni non additive, le funzioni k -triangolari.

TEOREMA 3. – Siano L un OMP con la SIP e $\mathcal{G}$ un gruppo topologico commutativo.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $\mu_n: L \rightarrow G$ finitamente additiva ed esaustiva.

Allora $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è uniformemente esaustivo se e solo se per ogni successione ortogonale $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in L e ogni intorno U di 0 in $\mathcal{G}$ esistono $\bar{n}$ e $\bar{p}$ in $\mathbb{N}$ tali che $\mu_n(a_{\bar{p}}) \in U \quad \forall n \geq \bar{n}$.

Questo teorema, noto come Teorema di Cafiero, pur non essendo esattamente del tipo illustrato nell'introduzione è comunque considerato un «teorema di convergenza».

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANTOSIK P. e SWARTZ C., *Matrix Methods in Analysis*, Springer Verlag (1985).
- [2] CACCIOPPOLI R., *Integrali impropri di Stieltjes. Estensione del teorema di Vitali*, Rend.Acc.Sc.Fis.Mat.Napoli (3), **33** (1927), 150-153.
- [3] D'ANDREA A.B. and DE LUCIA P., *Sul passaggio al limite sotto il segno di integrale per funzioni a valori in un gruppo topologico*, Le Matematiche, **34** (1979), 56-73.
- [4] PAP E., *Funkcionalna Analiza*, Univerzitet u Novom Sadu, Insitut za Matematiku (1982).
- [5] RICKART C.E., *Decomposition of additive set functions*, Duke Math. J., **10** (1943), 653-665.
- [6] SCHACHERMAYER W., *On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma complete Boolean algebras*, Dissertationes Math., **214** (1982), 1-33.
- [7] SWARTZ C., *An introduction to functional analysis*, Dekker, New York (1992).
- [8] VON NEUMANN J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, (1955).
- [9] WEBER H., *Compactness in spaces of group-valued contents, the Vitali-Hahn-Saks theorem and Nikodym's boundedness theorem*, Rocky Mount. J. Math., **16** (1986), 253-275.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «Renato Caccioppoli», Università di Napoli
e-mail: salvati@matna3.dma.unina.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Paolo de Lucia