Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Monica Musso

Esistenza e molteplicità di soluzioni per equazioni ellittiche nonlineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 141–144.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_141_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 141-144

Esistenza e molteplicità di soluzioni per equazioni ellittiche nonlineari.

MONICA MUSSO

1. – Introduzione.

In questa tesi si studiano alcune classi di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico non lineari. Lo scopo è stabilire risultati di esistenza, non esistenza, molteplicità di soluzioni non banali per tali equazioni.

I problemi considerati sono di tipo variazionale, cioè le soluzioni corrispondono a punti critici di opportuni funzionali definiti su alcuni spazi di funzioni. Per studiare l'esistenza e la molteplicità di punti critici di tali funzionali verranno utilizzati i metodi topologici del Calcolo delle Variazioni (in particolare i teoremi di passo montano, i metodi di linking, la categoria di Ljusternik-Schnirelman), che permettono di collegare il numero dei punti critici con le proprietà topologiche dei sottolivelli dei funzionali.

Le tre classi di problemi considerati sono le seguenti:

- Problemi ellittici non lineari approssimanti equazioni degeneri;
- Equazioni ellittiche non lineari in $\mathbb{R}^N$;
- Equazioni ellittiche non lineari con esponente di Sobolev critico e condizioni di Neumann al bordo.

2. – Problemi ellittici non lineari approssimanti equazioni degeneri.

Consideriamo la seguente famiglia di problemi di Dirichlet

$$P_\varepsilon \begin{cases} \operatorname{div}(a_\varepsilon(x)\, Du) + g(x, u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u \not\equiv 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un aperto regolare e limitato di $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$, $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di Caratheodory con crescita superlineare e sottocritica tale che $g(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \Omega$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon(x)$ è una matrice $N \times N$ definita positiva e simmetrica a coefficienti in $L^\infty(\Omega)$. Si assume che la matrice $a_\varepsilon(x)$ degeneri, per $\varepsilon \to 0$, in un sottoinsieme $\mathcal{D}$ (l'insieme di degenerazione) di Ω.

Ci siamo proposti di studiare la risolubilità del problema P_ε, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, e di collegare il numero delle soluzioni con le proprietà geometriche dell'insieme di degenerazione $\mathcal{D}$, sotto opportune ipotesi sulla funzione $g(x, t)$.

Il segno di $g_t(x, 0)$ (g_t indica la derivata di g rispetto alla seconda variabile) svolge un ruolo chiave per l'esistenza di soluzioni positive di P_ε, quando ε è sufficientemente piccolo. Se $g_t(x, 0) > 0$ per ogni x in un sottoinsieme dell'insieme di degenerazione $\mathcal{D}$, allora, per ε sufficientemente piccolo, P_ε non può avere alcuna soluzione con segno costante in quel sottoinsieme; in particolare, P_ε non può avere soluzioni positive (cfr. [7]).

Se invece $g_t(x, 0) \leqslant 0$ in Ω, P_ε ha almeno una soluzione positiva per ogni $\varepsilon > 0$. In particolare, se l'insieme di degenerazione $\mathcal{D}$ è composto da k componenti connesse, $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, con $k > 1$, allora esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che, per ogni $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}[$, si ha:

1. P_ε ha almeno k soluzioni positive $u_{\varepsilon,1}, \ldots, u_{\varepsilon,k}$ (cfr. [3]), che soddisfano la seguente proprietà:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega |Du_{\varepsilon,i}|^2 dx \right)^{-1} \int_{\Omega_i} |Du_{\varepsilon,i}|^2 dx = 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\};$$

2. P_ε ha soluzioni positive di tipo «multibump» (cfr. [5], [10]). Più precisamente, se scegliamo arbitrariamente r sottoinsiemi distinti tra $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ (insiemi che indichiamo con $\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_r}$), si può costruire una soluzione positiva $u_\varepsilon^{i_1, \ldots, i_r}$ con r «bumps», avente le seguenti proprietà:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega |Du_\varepsilon^{i_1, \ldots, i_r}|^2 dx \right)^{-1} \int_{\Omega \setminus \bigcup_{s=1}^{r} \Omega_{i_s}} |Du_\varepsilon^{i_1, \ldots, i_r}|^2 dx = 0$$

e

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega |Du_\varepsilon^{i_1, \ldots, i_r}|^2 \ dx \right)^{-1} \int_{\Omega_{i_s}} |Du_\varepsilon^{i_1, \ldots, i_r}|^2 \ dx > 0 \quad \cup \quad s \in \{1, \ldots, r\}.$$

3. P_ε ha almeno k^2 soluzioni che cambiano segno (cfr. [4]), aventi esattamente due regioni nodali (cioè entrambi i supporti della parte positiva e di quella negativa di u sono sottoinsiemi connessi di Ω). Inoltre le soluzioni ottenute $u_{\varepsilon,i,j}$, per ogni $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, hanno le seguenti proprietà:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega |Du_{\varepsilon,i,j}^+|^2 dx \right)^{-1} \int_{\Omega_i} |Du_{\varepsilon,i,j}^+|^2 dx = 1$$

e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\Omega |Du_{\varepsilon,i,j}^-|^2 dx \right)^{-1} \int_{\Omega_j} |Du_{\varepsilon,i,j}^-|^2 dx = 1 .$$

Se $\sup\limits_{x \in \Omega} g_t(x, 0) < 0$, i fenomeni di concentrazione vengono amplificati: ciò permette di dimostrare che il numero delle soluzioni può aumentare anche se l'insieme di degenerazione $\mathcal{D}$ è connesso (cioè $k = 1$), purché abbia topologia non banale. In [6] si dà una stima del numero di soluzioni positive di P_ε, per ε sufficientemente piccolo, con la categoria di Ljusternik-Schnirelman dell'insieme di degenerazione in sè.

3. – Equazioni ellittiche non lineari in $\mathbb{R}^N$.

Consideriamo una seconda classe di problemi ellittici non lineari, caratterizzati da mancanza di compattezza per la non limitatezza del dominio

$$P_a \begin{cases} -\Delta u + (1 + a(x))\,u = |u|^{p-2}u & \text{in } \mathbb{R}^N \\ u > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

dove $p > 2$, con $p < (2N/N - 2)$ se $N \geqslant 3$, e $a(x)$ è una funzione non negativa di $L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$.

Lo scopo del nostro lavoro è fornire condizioni sufficienti sulla funzione $a(x)$ per ottenere esistenza e molteplicità di soluzioni per P_a.

Se la funzione $a(x)$ è della forma

$$a(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \alpha_i(\lambda_i(x - x_i))\,,$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sono funzioni non negative di $L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono numeri positivi e $x_1, \ldots, x_k$ sono punti in $\mathbb{R}^N$, si dimostra l'esistenza di almeno $2k - 1$ soluzioni di P_a quando le distanze tra i punti $x_1, \ldots, x_k$ sono grandi e i parametri $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono abbastanza grandi oppure abbastanza piccoli (cfr. [9]); nessuna informazione è data per valori arbitrari di tali parametri.

Al contrario, fissate k funzioni non negative $A_1(x), \ldots, A_k(x)$ in $L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, se $a(x)$ è della forma

$$a(x) = \sum_{i=1}^{k} A_i(x - x_i)\,,$$

allora P_a ha almeno $2k - 1$ soluzioni purchè $A_1(x), \ldots, A_k(x)$ abbiano un opportuno decadimento all'infinito e i punti $x_1, \ldots, x_k$ siano sufficientemente distanti l'uno dall'altro (cfr. [2]).

4. – Equazioni ellittiche non lineari con esponente di Sobolev critico e condizioni di Neumann al bordo.

Sia NP_a il seguente problema

$$NP_a \begin{cases} -\Delta u + a(x)\,u = u^{2^*-1} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un dominio regolare e limitato di $\mathbb{R}^N$, con $N \geqslant 3$, $2^* = 2N/(N-2)$, $a \in L^{N/2}(\Omega)$ è una funzione non negativa e ν indica la normale esterna a $\partial\Omega$.

Cerchiamo condizioni sulla funzione $a(x)$ sufficienti a garantire esistenza e molteplicità di soluzioni del problema NP_a.

In [8] consideriamo la funzione $a(x)$ della forma

$$a(x) = \alpha_0(x) + \mu^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\varepsilon_j^2} \alpha_j \left(\frac{\mu}{\varepsilon_j}(x - x_j)\right)\right)$$

dove $\alpha_0 \in L^{N/2}(\Omega)$, per $j = 1, \dots, k$, $\alpha_j \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ sono funzioni non negative, μ, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ sono numeri positivi e $x_1, \dots, x_k$ sono punti di $\partial\Omega$.

Nell'ipotesi che $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ abbiano norma $L^{N/2}$ diversa da zero in opportuni semispazi di $\mathbb{R}^N$, dimostriamo che è possibile scegliere i parametri di concentrazione $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ (piccoli) e μ (grande) in modo tale che il problema NP_a abbia almeno k soluzioni di energia alta distinte, o ne abbia almeno $2k$ se $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ soddisfano alcune altre ipotesi (il risultato riportato in [1] corrisponde al caso $k = 1$).

BIBLIOGRAFIA

[1] CERAMI G. and PASSASEO D., *High energy positive solutions for mixed and Neumann elliptic problems with critical nonlinearity*, In corso di stampa su Annales Inst. H. Poincaré - Analyse Nonlinéaire.

[2] MOLLE R., MUSSO M. and PASSASEO D., *Positive solutions for a class of nonlinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$.

[3] MUSSO M. and PASSASEO D. *Positive solutions of nonlinear elliptic problems approximating degenerate equations*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, **6** (1995), 371-397.

[4] MUSSO M. and PASSASEO D., *Sign changing solutions of nonlinear elliptic equations*, Advances in Differential Equations, **1** (1996), 1025-1052.

[5] MUSSO M. and PASSASEO D., *Multibumps solutions for a class of nonlinear elliptic problems*, In corso di stampa su Calculus of Variations and PDE.

[6] MUSSO M. and PASSASEO D., *On the number of positive solutions of some nonlinear elliptic problems*, In corso di stampa su Houston Journal of Mathematics.

[7] MUSSO M. and PASSASEO D., *Nonlinear elliptic problems approximating degenerate equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications **30,** 8 (1997), 5071-5076.

[8] MUSSO M. and PASSASEO D., *Multiple solutions of Neumann elliptic problems with critical nonlinearity*, In corso di stampa su Discrete and Continuous Dynamical Systems.

[9] MUSSO M. and PASSASEO D., *Some nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$, Preprint Dip. Mat. Pisa (1996).

[10] MUSSO M. and PASSASEO D., *Nontrivial solutions of some nonlinear elliptic problems*.

[11] PASSASEO D., *Some concentration phenomena in degenerate semilinear elliptic problems*, Nonlinear Analysis T.M.A. **24**, no. **7** (1995), 1011-1025.

Indirizzo: via Pavia 16 - 10090 Cascine Vica - Rivoli (To)
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. D. Passaseo