
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

RICCARDO MOLLE

Problemi variazionali non lineari di tipo ellittico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 133–136.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_133_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_133_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Problemi variazionali non lineari di tipo ellittico.

RICCARDO MOLLE

Oggetto della tesi è lo studio di alcuni problemi variazionali collegati ad equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, semilineari, di tipo ellittico. I risultati ottenuti riguardano l'esistenza, la molteplicità e le proprietà qualitative delle soluzioni. Tali soluzioni sono caratterizzate come punti critici di opportuni funzionali. Utilizzando metodi topologici del Calcolo delle Variazioni (quali i metodi di «linking», la categoria di Ljusternik-Schnirelman, etc.) si collega il numero di punti critici di tali funzionali alle proprietà topologiche dei loro sottolivelli. Si noti che questi metodi sono applicati in un ambito diverso da quello abituale, in ipotesi che esulano da quelle classiche o perché i funzionali non sono sufficientemente regolari (come accade nei problemi con vincoli unilaterali), oppure perché non sono soddisfatte alcune tipiche condizioni di compattezza (quali la ben nota condizione di Palais-Smale), come accade quando si considerano aperti non limitati o quando intervengono termini non lineari con crescita critica per l'immersione di Sobolev.

1. – Un problema con vincolo unilaterale sulle derivate.

Sia Ω un aperto limitato di R^N , $g: \Omega \times R \rightarrow R$ una funzione di Caratheodory, ψ ed h due funzioni in $H_0^1(\Omega)$ ed in $L^2(\Omega)$ rispettivamente. Posto $K_\psi = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \Delta u \leq \Delta \psi \text{ in senso debole}\}$, consideriamo il problema

$$P_\psi(h) \begin{cases} u \in K_\psi \\ \int_{\Omega} [DuD(v-u) - g(x, u)(v-u) + h(v-u)] dx \geq 0 \quad \forall v \in K_\psi. \end{cases}$$

Sotto opportune ipotesi sulla posizione del limite $\lim_{t \rightarrow \infty} g(x, t)/t$ rispetto agli autovalori $(\lambda_i)_i$ dell'operatore di Laplace $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ (cfr. [1, 5, 7]), si studia la risolubilità del problema $P_\psi(h)$ al variare della coppia (ψ, h) e si descrive la struttura dell'insieme delle soluzioni (esistenza di una soluzione minima, etc.). In particolare, se $g(x, u) = \lambda u$ con $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, si prova che l'insieme delle coppie (ψ, h) per le quali $P_\psi(h)$ ha soluzione è un cono convesso chiuso con vertice nell'origine; inoltre si prova che, se la coppia (ψ, h) è interna a tale cono, allora $P_\psi(h)$ ha due soluzioni.

I risultati ottenuti evidenziano una profonda analogia con un ben noto teorema di Ambrosetti e Prodi, riguardante il problema di Dirichlet $-\Delta u + g(u) = h$ in Ω , $u = 0$ su $\partial\Omega$, nell'ipotesi (di tipo «jumping»)

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{g(t)}{t} < \lambda_1 < \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t} < \lambda_2.$$

In effetti un confronto dei sottolivelli dei funzionali corrispondenti mostra che il vincolo $\Delta u \leq \Delta \psi$ svolge un ruolo simile a quello dell'ipotesi $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t)/t < \lambda_1$. È

da notare però che tale analogia riguarda i risultati e non i metodi, in quanto il risultato di Ambrosetti e Prodi è ottenuto con un metodo diverso, non variazionale (basato sull'analisi dei punti di «piega» di una opportuna applicazione differenziabile tra spazi di Banach).

2. - Problemi di Dirichlet in domini esterni.

Sia Ω un dominio esterno di R^N (cioè $R^N \setminus \overline{\Omega}$ è aperto, limitato e non vuoto). Consideriamo il seguente problema:

$$P(\Omega) \begin{cases} -\Delta v + v = |v|^{p-2}v & \text{in } \Omega \\ v > 0 & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $p > 2$ e $p < 2^*$ se $N \geq 3$ ($2^* = 2N/(N-2)$) è l'esponente critico per l'immersione di Sobolev).

Le soluzioni del problema corrispondono alle funzioni non negative che sono punti critici del funzionale «energia»

$$\mathcal{E}(u) = \int_{R^N} (|Du|^2 + u^2) dx,$$

vincolato sulla varietà

$$V(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_p = 1\}.$$

È noto che l'estremo inferiore $m = \inf_{V(\Omega)} \mathcal{E}(u)$ è indipendente dal dominio esterno Ω e non è un minimo; se invece $\Omega = R^N$, allora vale ancora $\inf_{V(R^N)} \mathcal{E}(u) = m$ ed esiste una funzione positiva ω , unica a meno di traslazioni, tale che $\mathcal{E}(\omega) = m$. Se Ω è un dominio esterno, non è quindi possibile trovare una soluzione di $P(\Omega)$ semplicemente minimizzando $\mathcal{E}$ su $V(\Omega)$. Esiste tuttavia una soluzione corrispondente ad un punto critico v_Ω , la cui energia è tanto più grande quanto più è grande $R^N \setminus \Omega$. Posto $r(\Omega) = \sup \{r \in R^+ \mid B(y, r) \subseteq R^N \setminus \Omega \text{ per qualche } y \in R^N\}$, si prova che

$$\lim_{r(\Omega) \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(v_\Omega) = 2^{1-2/p} m.$$

Questa proprietà permette inoltre di provare l'esistenza di $2k-1$ soluzioni distinte di $P(\Omega)$ quando $R^N \setminus \overline{\Omega}$ è costituito da k componenti connesse sufficientemente grandi e distanti tra loro (cfr. [3,4]).

3. - Una classe di equazioni ellittiche semilineari in R^N .

Data una funzione non negativa $a(x)$ in $L^{N/2}(R^N)$, consideriamo il problema

$$P_a \begin{cases} -\Delta u + (1 + a(x))u = |u|^{p-2}u & \text{in } R^N \\ u > 0 & \text{in } R^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0, \end{cases}$$

dove $p > 2$ e $p < 2^*$ se $N \geq 3$.

Le soluzioni del problema P_a corrispondono alle funzioni non negative che sono punti critici per il funzionale energia $F_a: H^1(R^N) \rightarrow R$, definito da

$$F_a(u) = \int_{R^N} (|Du|^2 + (1 + a(x))u^2) dx,$$

vincolato sulla varietà $V(R^N)$.

Si prova che $\inf F_a(u) = m$ per ogni $a(x) \in L^{N/2}(R^N)$, $a(x) \geq 0$; inoltre l'estremo inferiore m è raggiunto solo se $a \equiv 0$, nel qual caso, come detto sopra, la funzione minimizzante ω è unica a meno di traslazioni.

Nell'ipotesi che la funzione $a(x)$ soddisfi una opportuna condizione di decadimento esponenziale all'infinito, si dimostra che esiste almeno una soluzione v_a del problema P_a . Inoltre si prova che, se $(a_n)_n$ è una successione di funzioni con decadimento esponenziale che tende all'infinito quasi ovunque, la soluzione v_{a_n} tende a decomporre nella somma di due funzioni minimizzanti per m , che si allontanano in direzioni opposte.

Usando quest'ultima proprietà si trovano $2k - 1$ soluzioni del problema P_a nel caso in cui

$$a(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x - x_i),$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sono opportune funzioni in $L^{N/2}(R^N)$, non negative, non identicamente nulle, con decadimento esponenziale all'infinito, e $x_1, \dots, x_k$ sono punti di R^N sufficientemente distanti tra loro (cfr [6]).

4. - Equazioni ellittiche con esponente di Sobolev critico.

Consideriamo il problema di Neumann

$$P_A \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + A(x)u = |u|^{2^*-2}u & \text{in } \Pi \\ u > 0 & \text{in } \Pi \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial \Pi, \end{array} \right.$$

dove $N \geq 3$, Π è un semispazio di R^N , ν è la normale esterna al suo bordo ed $A(x)$ è una data funzione non negativa su Π .

Le soluzioni di questo problema corrispondono alle funzioni positive che sono punti critici per il funzionale $E: H^1(\Pi) \rightarrow R$ definito da

$$E(u) = \int_{\Pi} (|Du|^2 + A(x)u^2) dx,$$

vincolato sulla varietà

$$M = \{u \in H^1(\Pi) \mid \|u\|_{2^*} = 1\}.$$

È ben noto che P_A non ha soluzioni se A è una costante positiva e che non esiste il minimo di E su M , a meno che non sia $A \equiv 0$. Tuttavia valgono risultati di esistenza e molteplicità di soluzioni di P_A nel caso in cui $A(x) \in L^{N/2}(\Pi)$ (cfr. [2]).

Supponiamo ora che la funzione $A(x)$ sia della forma

$$A(x) = k + \bar{A}(x) + \sum_{i=1}^h \mu_i^2 A_i(\mu_i(x - x_i)),$$

dove $k > 0$, $\bar{A}$ e A_i , $i = 1, \dots, h$, sono funzioni non negative e non identicamente nulle in $L^{N/2}(\Pi)$ e μ_i sono parametri positivi. Si dimostra che, se i parametri «di concentrazione» μ_i sono abbastanza grandi, allora esistono $2h$ soluzioni, u_{μ_i} , $\hat{u}_{\mu_i}$ ($i = 1, \dots, h$). Queste soluzioni si concentrano come delta di Dirac vicino ai punti x_i , quando $\mu_i \rightarrow \infty$ e inoltre, previo riscaldamento, le soluzioni u_{μ_i} , di «bassa energia», convergono a soluzioni del problema P_A con $A(x) \equiv 0$, mentre le soluzioni $\hat{u}_{\mu_i}$, di «alta energia», convergono a soluzioni del problema P_A con $A(x) = A_i(x)$.

Si noti che, per ottenere $2h$ soluzioni, non occorre richiedere che i «punti di concentrazione» $x_1, \dots, x_h$ siano necessariamente distinti (basta solo scegliere i parametri μ_i in modo opportuno). Se invece si richiede che tali punti siano tra loro sufficientemente lontani, allora si trovano almeno $4h - 2$ soluzioni distinte (la dimostrazione è riportata in un lavoro in preparazione).

BIBLIOGRAFIA

- [1] MOLLE R. and PASSASEO D., *An elliptic problem with pointwise constraint on the laplacian*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 8-1 (1996), 1-23.
- [2] MOLLE R. and PASSASEO D., *Multiplicity of positive solutions of elliptic equations with critical Sobolev exponent*, Bollettino U.M.I. (7), 11-B (1997), 435-462.
- [3] MOLLE R. and PASSASEO D., *On the behaviour of the solutions for a class of nonlinear elliptic problems in exterior domains*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 4-3 (1998), 445-454.
- [4] MOLLE R. and PASSASEO D., *Multiple solutions of nonlinear elliptic Dirichlet problems in exterior domains*, Nonlinear Analysis T.M.A.
- [5] MOLLE R. and PASSASEO D., *Variational problems with pointwise constraints on the derivatives*, Journal of Convex Analysis.
- [6] MOLLE R., MUSSO M. and PASSASEO D., *Positive solutions for a class of nonlinear elliptic problems in R^N* , Preprint Dip. Mat. Univ. Pisa.
- [7] MOLLE R. and PASSASEO D., *A jumping behaviour induced by a pointwise constraint on the derivatives*, Preprint Dip. Mat. Univ. Pisa.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

e-mail: molle@dm.unipi.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Cielo VIII

Direttore di ricerca: Prof. Donato Passaseo