BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

CORRADO MARASTONI

Teoria dei fasci e trasformazioni integrali per $\mathcal{D}$-moduli tra varietà di Grassmann

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 129–132.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_129_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 129-132

Teoria dei fasci e trasformazioni integrali per $\mathcal{D}$-moduli tra varietà di Grassmann.

CORRADO MARASTONI

1. – Le trasformazioni integrali nel linguaggio di fasci e $\mathcal{D}$-moduli

Date due varietà X e Y, in generale non è dato un morfismo tra esse. Tuttavia, euristicamente parlando, dei dati su X (funzioni, classi di coomologia...) possono essere trasformati in dati su Y tramite una funzione «nucleo» $K(x, y)$ definito in $X \times Y$: dato un elemento di volume dx su X, tale corrispondenza dà

$$f(x) \mapsto (\Phi_K f)(y) = \int_X K(x, y)\, f(x)\, dx$$

(si pensi ad esempio alla trasformata di Fourier, ove $X = \mathbf{R}^n$, $Y = (\mathbf{R}^n)^*$ e $K(x, y) = \exp(-ix \cdot y)$). Formalmente, denotate con q_1 e q_2 le proiezioni di $X \times Y$ su X ed Y, si è effettuato un *pull-back* di f in $X \times Y$ (ovvero $(q_1^{-1} f)(x, y) = f(x)$), quindi una *moltiplicazione* per il nucleo $K(x, y)$, ed infine un *push-forward* di $K \cdot (q_1^{-1} f)$ in Y (ovvero un'integrazione lungo la mappa q_2, di fibra X). Questo procedimento può essere effettuato anche nella categoria dei fasci e (se X e Y sono analitiche complesse) dei $\mathcal{D}$-moduli, ove $\mathcal{D}$ è il fascio di anelli degli operatori differenziali lineari a coefficienti olomorfi: l'idea (vedi [2]) è di separare gli aspetti geometrici della trasformazione (stima di supporto, regolarità dei dati...), tipicamente di fasci, da quelli analitici (sistema di E.D.P. che intervengono nella descrizione degli spazi di dati in X ed in Y), tipicamente di $\mathcal{D}$-moduli. In queste categorie, rimandando a [4] per le notazioni, il pull-back diventa il funtore di immagine inversa per fasci q_1^{-1} (oppure per $\mathcal{D}$-moduli sinistri $\underline{q_1}^{-1}$), la moltiplicazione il prodotto tensoriale $\otimes = \otimes_{\mathbf{C}_{X \times Y}}$ (oppure $\otimes^L_{\mathcal{O}_{X \times Y}}$) ed il push-forward il funtore di immagine diretta propria per fasci $Rq_{2!}$ (oppure per $\mathcal{D}$-moduli $\underline{q_{2!}}$). In altre parole, sia $\mathbf{D}^b(\mathbf{C}_X)$ (risp. $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$) la categoria derivata dei complessi di fasci di $\mathbf{C}$-spazi vettoriali (risp. $\mathcal{D}$-moduli) a coomologia limitata: dati $K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathbf{C}_{X \times Y}))$ e $\mathcal{K} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{X \times Y}))$, sono definiti dei funtori

$$\Phi_K \colon \mathbf{D}^b(\mathbf{C}_X) \to \mathbf{D}^b(\mathbf{C}_Y), \qquad \Phi_K(F) = Rq_{2!}(K \otimes q_1^{-1} F),$$

$$\underline{\Phi}_{\mathcal{K}} \colon \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X) \to \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y), \qquad \underline{\Phi}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}) = \underline{q_{2!}}(\mathcal{K} \otimes^L_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \underline{q_1}^{-1} \mathcal{M}),$$

e dei funtori simili (che denoteremo con gli stessi simboli) nelle direzioni opposte. Se $\mathcal{K}$ è un $\mathcal{D}_{X \times Y}$-modulo «olonomo regolare» (nozione che generalizza quella, in una variabile complessa, di $\mathcal{D}$-modulo associato ad equazioni differenziali ordinarie a singolarità regolari), e

$$K = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X\times Y}}(\mathcal{K}, \mathcal{O}_{X\times Y})$$

è il complesso («perverso» alla Deligne) delle sue soluzioni olomorfe, nel caso che X e Y siano varietà analitiche complesse compatte di dimensione d_X e d_Y, si dimostrano le seguenti *formule d'aggiunzione* (vedi [2]), che legano le soluzioni globali di un $\mathcal{D}_X$-modulo a quelle del suo trasformato: per ogni «$\mathcal{D}_X$-modulo» $\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X))$ e ogni «fascio su Y» $G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathbf{C}_Y))$ vale

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Phi_K(G) \otimes \mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Y}(\underline{\Phi}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}), G\ \mathcal{O}_Y)[-d_X]$$

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\mathcal{H}om(\Phi_K(G), \mathcal{O}_X)) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Y}(\underline{\Phi}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}), R\mathcal{H}om(G, \mathcal{O}_Y))[-d_X + 2d_Y].$$

Queste formule racchiudono in sè un approccio alle trasformazioni integrali in cui il *problema analitico* (calcolo di $\underline{\Phi}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M})$) ed il *problema geometrico* (calcolo di $\Phi_K(G)$) sono separati. Differenti scelte del $\mathcal{D}$-modulo $\mathcal{M}$ e del fascio G conducono a differenti problemi di trasformazioni integrali tra X e Y.

In questa tesi ci occupiamo del calcolo della trasformata di una classe particolarmente semplice di $\mathcal{D}$-moduli, nel quadro delle varietà di Grassmann.

2. – La trasformata di Radon-Penrose generalizzata.

Dati due interi $n \geqslant 3$ e $1 \leqslant p \leqslant n-2$, siano $V \simeq \mathbf{C}^{n+1}$ uno spazio vettoriale complesso di dimensione $n+1$, $\mathbf{P}$ lo spazio proiettivo di V, $\mathbf{G}$ la varietà di Grassmann dei $(p+1)$-sottospazi lineari di V, e $\mathbf{F} = \{(x, y) \in \mathbf{P} \times \mathbf{G} : x \subset y\}$ la *flag manifold* di tipo $(1, p+1)$. Le varietà $\mathbf{P}$ e $\mathbf{G}$ sono analitiche complesse e compatte, di dimensione n e $(p+1)(n-p)$. La sottovarietà complessa chiusa $(n-p)$-codimensionale $\mathbf{F}$ di $\mathbf{P} \times \mathbf{G}$ induce una trasformazione integrale *geometrica* tra $X = \mathbf{P}$ e $Y = \mathbf{G}$: i funtori saranno $\Phi_{\mathbf{C}_{\mathbf{F}}[-n+p]}$ e $\underline{\Phi}_{\mathcal{B}_{\mathbf{F}}}$, ove $\mathbf{C}_{\mathbf{F}}$ è il fascio costruttibile su $\mathbf{P} \times \mathbf{G}$ associato a $\mathbf{F}$ e $\mathcal{B}_{\mathbf{F}}$ è il $\mathcal{D}_{\mathbf{P}\times\mathbf{G}}$-modulo olonomo regolare delle iperfunzioni olomorfe lungo $\mathbf{F}$ (si noti che $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbf{P}\times\mathbf{G}}}(\mathcal{B}_{\mathbf{F}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathbf{G}}) \simeq \mathbf{C}_{\mathbf{F}}[-n+p]$). Considerata la «corrispondenza»

$$\mathbf{P} \xleftarrow{f} \mathbf{F} \xrightarrow{g} \mathbf{G},$$

ove f e g sono le restrizioni ad $\mathbf{F}$ delle proiezioni q_1 e q_2, vale $\Phi_{\mathbf{C}_{\mathbf{F}}}(\cdot) \simeq g_! f^{-1}(\cdot)$ e $\underline{\Phi}_{\mathcal{B}_{\mathbf{F}}}(\cdot) \simeq \underline{g_!} \underline{f}^{-1}(\cdot)$. Si tratta di un quadro geometrico studiato da molti autori, sia nel caso complesso (Eastwood-Penrose-Wells, D'Agnolo-Schapira...) che reale (Radon, John, Gelfand et al.,...). Dato $\lambda \in \mathbf{Z}$, sia $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\lambda)$ il fibrato olomorfo in rette su $\mathbf{P}$ ottenuto dalla λ-esima potenza tensoriale del fibrato tautologico (in effetti, tutti i fibrati in rette su $\mathbf{P}$ sono di questo tipo, a meno di isomorfismo), e sia $\mathcal{D}_{\mathbf{P}}(\lambda) = \mathcal{D}_{\mathbf{P}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(\lambda)$ il $\mathcal{D}_{\mathbf{P}}$-modulo localmente libero di rango 1 associato. Si prova che la corrispondenza induce microlocalmente una trasformazione di contatto «a parametro olomorfo»; usando i risultati di [2, J.F.A.] ed esibendo sezioni «nondegenerate» che quantizzano tale trasformazione, si prova che:

TEOREMA 1. – *Per ogni* $\lambda \leq -p-1$ *il trasformato* $\underline{\Phi}_{\mathcal{B}_{\mathbf{F}}}(\mathcal{D}_{\mathbf{P}}(-\lambda))$ *è concentrato in grado zero, ed è il* $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$*-modulo associato ad un certo operatore differenziale (detto «ultraiperbolico»)* $P_\lambda \colon \mathcal{H}_\lambda \to \widetilde{\mathcal{H}}_\lambda$ *agente tra le sezioni di certi fibrati vettoriali* $\mathcal{H}_\lambda$ *e* $\widetilde{\mathcal{H}}_\lambda$ *su* $\mathbf{G}$*: ovvero, c'è una sequenza esatta di* $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$*-moduli (ove* P_λ^* *è l'operatore trasposto di* P_λ*)*

$$\mathcal{D}_{\mathbf{G}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}}} \widetilde{\mathcal{H}}_\lambda^* \xrightarrow{P_\lambda^*} \mathcal{D}_{\mathbf{G}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}}} \mathcal{H}_\lambda^* \to \underline{\Phi}_{\mathcal{B}_{\mathbf{F}}}(\mathcal{D}_{\mathbf{P}}(-\lambda)) \to 0 .$$

La descrizione dei fibrati $\mathcal{H}_\lambda$ e $\widetilde{\mathcal{H}}_\lambda$ e dell'operatore P_λ è piuttosto complicata: essi possono essere visti ad esempio anche in [1, cap. 9]. Questo risultato apparirà in [3, cap. 9] in forma generalizzata e con varie applicazioni, ottenute dalle formule d'aggiunzione con diverse scelte di fasci G su $\mathbf{G}$.

3. – La dualità di Grassmann.

Dati due interi $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq n/2$, siano $V \simeq \mathbf{C}^n$ uno spazio vettoriale complesso di dimensione n, $\mathbf{G}$ la varietà di Grassmann dei p-sottospazi lineari di V, $\mathbf{G}^*$ la varietà di Grassmann duale degli $(n-p)$-sottospazi lineari di V,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}^* \colon x \cap y = 0\}$$

l'aperto denso delle coppie generiche ed $S = (\mathbf{G} \times \mathbf{G}^*) \setminus \Omega$ l'ipersuperficie complessa singolare, che ha una stratificazione di Whitney fatta dalle sottovarietà localmente chiuse $S_j = \{(x, y) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}^* \colon \dim(x \cap y) = j\}$ (ove $j = 1, \ldots, p$).

Considereremo la trasformazione integrale tra $X = \mathbf{G}$ e $Y = \mathbf{G}^*$ determinata da Ω, ovvero i funtori $\Phi_{\mathbf{C}_\Omega}$ e $\underline{\Phi}_{\mathcal{B}_\Omega}$, ove $\mathbf{C}_\Omega$ è il fascio costruttibile su $\mathbf{G} \times \mathbf{G}^*$ associato a Ω e $\mathcal{B}_\Omega$ è il $\mathcal{D}_{\mathbf{G} \times \mathbf{G}^*}$-modulo olonomo regolare delle funzioni meromorfe a polo su S (si noti che $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}^*}}(\mathcal{B}_\Omega, \mathcal{O}_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}^*}) \simeq \mathbf{C}_\Omega$). Usando le proprietà geometriche di Ω (in particolare, si osservi che per ogni $y \in \mathbf{G}^*$, $\mathbf{G}_y = \{x \in \mathbf{G} \colon x \cap y = 0\}$ è una carta affine di $\mathbf{G}$), proviamo che:

TEOREMA 2. – *Il funtore*

$$\Phi_{\mathbf{C}_\Omega} \colon \mathbf{D}^b(\mathbf{C}_{\mathbf{G}}) \to \mathbf{D}^b(\mathbf{C}_{\mathbf{G}^*}) \qquad (\textit{risp.}\ \ \underline{\Phi}_{\mathcal{B}_\Omega} \colon \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\mathbf{G}}) \to \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_{\mathbf{G}^*}))$$

è un'equivalenza di categorie, che induce equivalenze tra le sottocategorie piene degli oggetti a coomologia $\mathbf{R}$- *o* $\mathbf{C}$*-costruttibile (risp. coerente o olonoma regolare).*

Anche per le varietà di Grassmann denoteremo con $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(\lambda)$ (con $\lambda \in \mathbf{Z}$) il fibrato olomorfo in rette su $\mathbf{G}$ ottenuto dalla $-\lambda$esima potenza tensoriale del determinante del fibrato tautologico, e con $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}(\lambda) = \mathcal{D}_{\mathbf{G}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}}} \mathcal{O}_{\mathbf{G}}(\lambda)$ il $\mathcal{D}_{\mathbf{G}}$-modulo localmente libero di rango 1 associato. In questo caso, la corrispondenza induce microlocalmente una trasformazione di contatto tra due aperti densi di $T^*\mathbf{G}$ e $T^*\mathbf{G}^*$; usando ancora la tecnica delle sezioni «nondegenerate», la teoria delle b-funzioni (Sato, Bernstein, Kashiwara) e l'equivarianza della corrispondenza rispetto all'azione del gruppo $SL(V)$, si prova il seguente risultato, che era stato congetturato, in forma un po' diversa, nella parte finale della tesi e che generalizza [2, Duke]:

TEOREMA 3. – *Si ponga $\lambda^* = -n-\lambda$. Per ogni $\lambda \geqslant -n+p$ vale*

$$\underline{\Phi}_{\mathcal{B}_\Omega}(\mathcal{D}_{\mathbf{G}}(-\lambda)) \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{G}^*}(-\lambda^*).$$

Applicando allora le formule d'aggiunzione, per ogni $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathbf{C}_{\mathbf{G}}))$ ed ogni $-n+p \leqslant \lambda \leqslant -p$ vale

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{G}; F \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{G}}(\lambda)) \simeq \mathrm{R}\Gamma(\mathbf{G}^*; \Phi_{\mathbf{C}_\Omega}(F) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{G}^*}(\lambda^*))[p(n-p)],$$

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbf{G}; R\mathcal{H}om(F, \mathcal{O}_{\mathbf{G}}(\lambda))) \simeq \mathrm{R}\Gamma(\mathbf{G}^*; R\mathcal{H}om(\Phi_{\mathbf{C}_\Omega}(F), \mathcal{O}_{\mathbf{G}^*}(\lambda^*)))[-p(n-p)].$$

I risultati di questa sezione, con diverse applicazioni, sono stati annunciati in [5, C.R.A.S.] ed appariranno in [5, Ann. Ecole Norm. Sup.].

* * *

Gran parte di questa ricerca è stata svolta presso l'Université Paris 6 con la supervisione di Pierre Schapira, che desidero ringraziare per l'attenzione ed i numerosi consigli che mi ha riservato. Per gli stessi motivi, sono riconoscente anche ad Andrea D'Agnolo, Masaki Kashiwara e Giuseppe Zampieri.

BIBLIOGRAFIA

[1] BASTON R.J. and EASTWOOD M.G., *The Penrose transform: its interaction with representation theory*, Oxford Univ. Press (1989).

[2] D'AGNOLO A. and SCHAPIRA P., *Radon-Penrose transform for $\mathcal{D}$-modules*, J. Funct. Anal., **39** (1996) 349-382; *Leray's quantization of projective duality*, Duke Math. J., **84** (1996), 453-496.

[3] D'AGNOLO A. and MARASTONI C., *The ultrahyperbolic $\mathcal{D}$-module. Real forms of the Radon p-plane transform: an approach by sheaves and $\mathcal{D}$-modules*, Prepubblicazioni.

[4] KASHIWARA M. and SCHAPIRA P., *Sheaves on manifolds*, Springer Grundlehren, **292** (1990).

[5] MARASTONI C., *La dualité de Grassmann pour les $\mathcal{D}$-modules. Quantification de la dualité de Grassmann*, C. R. Acad. Sci., **322/324** (1996/1997); *Grassmann duality for $\mathcal{D}$-modules.* In apparizione su Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.l (1998).

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: marasto@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede mministrativa: Padova) - Ciclo VII
Direttore di ricerca: prof. Giuseppe Zampieri (Università di Padova)