BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GIOVANNINA ALBANO

Calcolo del conduttore di curve algebriche e ideali di punti

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1S (Supplemento
Tesi di Dottorato), p. 11–14.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_11_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Calcolo del conduttore di curve algebriche e ideali di punti.

GIOVANNINA ALBANO

Il lavoro svolto nella tesi prende l'avvio dallo studio del calcolo del conduttore di una curva algebrica. Il conduttore è un ideale dell'anello delle coordinate di una varietà, il cui supporto è l'insieme dei punti non normali e quindi nel caso delle curve tale supporto è l'insieme dei punti singolari. Il calcolo del conduttore è pertanto interessante poiché è collegato alle singolarità della curva. Nella tesi viene dimostrato che il conduttore di una curva con cono tangente ridotto (cioè costituito da punti) passa a tale cono tangente. Dal punto di vista computazionale, acquista allora notevole importanza il calcolo del conduttore di punti. Allo scopo di effettuare tale calcolo a partire da un numero elevato di punti ci si è orientati alla costruzione di un efficiente algoritmo parallelo. Il nuovo approccio di tipo parallelo qui presentato permette di aumentare le dimensioni dei dati di input e di dare risposte che un algoritmo sequenziale non è in grado di dare sia per limiti di memoria che per limiti di tempo. La novità di questi algoritmi è anche la possibilità di rendere polinomiale il calcolo dei generatori di varietà razionali, proseguendo sulla strada aperta da Ramella [4] che ha ideato il primo algoritmo polinomiale per punti in *posizione generica*. Questo tipo di algoritmi apre un nuovo filone rispetto agli algoritmi di costo esponenziale che coinvolgono il calcolo di basi di Gröbner.

L'algoritmo parallelo dato per il conduttore di punti ha suggerito un algoritmo parallelo per la verifica della *Ideal Generation Conjecture* (I.G.C.). Per mezzo della implementazione fatta dall'autore vengono prodotti esempi di punti che soddisfano la I.G.C. in casi mai esaminati prima. L'interesse di avere un programma che sia in grado di dare esempi di gruppi di punti in spazi di dimensione maggiore di 3 deriva dal fatto che la dimostrazione teorica della congettura valida in $\mathbb{P}_k^3$ è per induzione e usa come base dell'induzione il caso dei 28 punti provato da Roberts tramite computer. Si auspica di poter produrre esempi che possano suggerire la dimostrazione della congettura in $\mathbb{P}_k^r$, $r \geq 4$.

Diamo ora alcuni risultati. Tutti gli anelli considerati saranno noetheriani, commutativi, unitari e supponiamo che gli omomorfismi conservino l'unità.

Siano A un anello ridotto (cioè ogni elemento nilpotente è nullo) e $\bar{A}$ la sua chiusura integrale nel suo anello totale delle frazioni.

DEFINIZIONE 1. – Si dice conduttore di A in $\bar{A}$ l'ideale $\mathcal{C}$ di A tale che

$$\mathcal{C} = \text{Ann}_A(\bar{A}/A) = \{x \in A \mid x\bar{A} \subseteq A\}$$

$\mathcal{C}$ è il più grande ideale di A che è anche ideale di $\bar{A}$.

PROPOSIZIONE 1. – *Siano A un anello ridotto, $\bar{A}$ la chiusura integrale di A finitamente generata su A . Allora gli ideali primi $\mathcal{P}$ di A tali che $A_{\mathcal{P}}$ non è integralmente chiuso sono quelli che contengono il conduttore $\mathcal{C}$ di A in $\bar{A}$.*

La proposizione precedente è particolarmente interessante perché fornisce una interpretazione geometrica del conduttore: una varietà X è normale se e solo se l'anello locale di ogni suo punto è integralmente chiuso; dalla prop. 1 si deduce che i punti non normali sono quelli il cui ideale massimale $\mathfrak{M}$ contiene il conduttore. Nel caso delle curve è noto che i punti non normali sono i punti singolari.

Sia $(A, \mathfrak{M})$ un anello locale ridotto di dimensione 1 e molteplicità $s = e(A)$, e sia $k = A/\mathfrak{M}$ il campo residuo di A . La normalizzazione $\bar{A}$ di A è semilocale. Detti $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_s$ gli ideali massimali di $\bar{A}$, indichiamo con $J = \mathfrak{M}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{M}_s$ il radicale di Jacobson di $\bar{A}$ e siano

$$G(A) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1}, \quad G(\bar{A}) = \bigoplus_{n \geq 0} J^n / J^{n+1}$$

gli anelli graduati associati rispettivamente ad A e ad $\bar{A}$.

Il naturale omomorfismo $\Phi_n: \mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1} \rightarrow J^n / J^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) induce l'omomorfismo di anelli graduati $\Phi: G(A) \rightarrow G(\bar{A})$. Tale omomorfismo è iniettivo se e solo se $G(A)$ è ridotto.

In [2] Orecchia ha dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA 1. – *Sia n un intero. Se $G(A)$ è ridotto e $G(J^n)$ è il conduttore di $G(A)$ in $G(\bar{A})$, allora $\mathfrak{M}^n = J^n$ è il conduttore di A in $\bar{A}$.*

D'ora innanzi supporremo che $(A, \mathfrak{M})$ sia l'anello locale di una curva affine ridotta $X = \text{Spec } R$, $R = k[X_1, \dots, X_r]$, in un suo punto singolare P . Ricordiamo che il cono tangente di X in P è lo schema $\text{Spec } G(A)$ e la sua dimensione è pari alla dimensione di X in P , per questo motivo viene utilizzato come approssimazione della curva X intorno al punto P , fornendo così importanti informazioni locali. $\text{Spec } G(A)$ (come insieme) è costituito da un numero finito di rette L_i che sono le tangenti alla curva X nel punto P . Osserviamo che l'anello delle coordinate del cono tangente è proprio l'anello graduato $G(A)$. Lo schema proiettivo $\text{Proj } G(A)$ viene detto cono tangente proiettivizzato e (come insieme) è costituito da un numero finito di punti. I punti singolari si caratterizzano per mezzo del cono tangente proiettivizzato: un punto s -plo P è un punto singolare ordinario se e solo se $\text{Proj } G(A)$ è ridotto, ovvero costituito da s punti.

Assumeremo $G(A)$ ridotto. Allora possiamo identificare $G(A)$ con un sottoanello della sua normalizzazione $G(\bar{A})$. Se $\text{emdim}(A) = r + 1$, allora $\text{Proj } G(A) = \{P_1, \dots, P_s\}$ è costituito da $s = e(A)$ punti di $\mathbb{P}_k^r$. Si dimostra [2]:

TEOREMA 2. – *Se $G(A)$ è ridotto e G è il conduttore di $G(A)$ in $G(\bar{A})$, allora $G = \bigcap_{i=1}^s G(\mathfrak{M}_i)^{n_i}$, dove n_i è il più piccolo grado di un'ipersuperficie passante per*

$\{P_1, \dots, P_s\} - \{P_i\}$ ma non per P_i . Inoltre se $n_i = n$ per ogni $i = 1, \dots, s$, allora l'ideale $\mathcal{N}^n$ è il conduttore di A in $\bar{A}$.

Gli interi n_i ci permettono di calcolare il conduttore $\mathcal{C}$ di A in $\bar{A}$. Infatti, è stato provato che $G = \prod_{i=1}^s G(\mathcal{N}_i)^{n_i}$ se e solo se $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^s \mathcal{N}_i^{n_i}$ è il conduttore di A in $\bar{A}$, estendendo così il teorema 1 al caso delle curve.

TEOREMA 3. - L'ideale $\mathcal{C}$ è il conduttore di A nella sua chiusura integrale $\bar{A}$ se e solo se $G(\mathcal{C})$ è il conduttore di $G(A)$ in $G(\bar{A})$.

Questo risultato consente di ricondurre il calcolo del conduttore di una curva affine ridotta con cono tangente ridotto al calcolo del conduttore di un insieme di punti proiettivi. Consideriamo allora il caso che sia $Y = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}_k^r$. Per ogni $i = 1, \dots, s$, poniamo $\deg_Y(P_i) = n_i$ e tale intero viene detto *grado del conduttore* di P_i in Y .

Possiamo considerare la funzione di Hilbert di Y come la funzione di Hilbert del suo anello delle coordinate $A' = \bigoplus_{d \geq 0} A'_d$, quindi

$$H(Y, d) = H(A', d) = \dim_k A'_d \leq \binom{d+r}{r}.$$

Ricordiamo che, poiché Y è un insieme di punti distinti, $H(Y, d)$ è crescente fino a diventare definitivamente costante a s .

È possibile caratterizzare $\deg_Y(P_i)$ attraverso la funzione di Hilbert. Si ha:

$$(1) \quad \deg_Y(P_i) = \text{Min} \{d \mid H(A'_i, d) \neq H(A', d)\}$$

dove A'_i è l'anello delle coordinate di $Y - \{P_i\}$.

Sia $d \in \mathbb{N}$, indichiamo con G_d^s la matrice la cui j -esima colonna è il vettore delle valutazioni dei termini di grado d sul punto P_j . Si vede che $H(Y, d) = \rho(G_d^s)$ (ρ = rango). In realtà si fa vedere che $H(Y, d) = \rho(H_s^d)$ con $H_s^d \subseteq G_d^s$ di dimensioni polinomiali, le cui colonne sono i vettori di valutazione sui punti di Y solo di un minimo sottoinsieme di termini di grado d , opportunamente scelti. La condizione (1) può essere riformulata come segue:

$$(2) \quad \deg_Y(P_i) = \text{Min} \{d \mid \rho(H_s^d) \neq \rho(H_{s,i}^d)\}$$

dove $H_{s,i}^d \subseteq H_s^d$ è la matrice delle valutazioni solo sui punti di $Y - \{P_i\}$.

Nella tesi vengono espresse nuove ottimizzazioni apportate all'algoritmo per il calcolo del conduttore di punti, ideato da Orecchia [3], che ne rendono efficiente l'implementazione: alcune osservazioni infatti permettono di costruire la matrice delle valutazioni con il costo minimo possibile, pari al numero dei suoi elementi, e di ridurre fortemente la quantità di memoria richiesta per il calcolo.

Viene proposto un algoritmo parallelo per il calcolo del conduttore di punti, che si estende facilmente per la verifica della I.G.C. L'algoritmo parallelo è stato

pensato per multiprocessori MIMD a memoria distribuita che fanno uso di un protocollo di comunicazione *message-passing*. Le matrici con cui si lavora sono state distribuite ai vari processori per pannelli verticali in maniera wrap-around. Tale distribuzione comporta i seguenti vantaggi: ad ogni grado d , la matrice H_d^s può essere aggiornata senza bisogno di alcuna comunicazione; bilanciamento del carico di lavoro per il calcolo della forma echelon (ridotta) di tali matrici.

ALGORITMO

$d := 0$

repeat

$d := d + 1$

Calcolo in parallelo della matrice H_s^d .

Calcolo in parallelo della forma echelon ridotta $\overline{H}_s^d$.

$H(X, d) := \varrho(H_s^d)$

Verifica della condizione (2)

until ($\varrho(H_s^d) = s$)

Gli algoritmi paralleli presentati nella tesi, sia per il conduttore sia per la I.G.C., sono stati implementati dall'autore su cluster di workstation HP 9000/700 e IBM RISC 6000, utilizzando il linguaggio ANSI C e il sistema di comunicazione PVM. Gli studi e gli esperimenti fatti confermano la bontà degli algoritmi paralleli proposti giacché l'efficienza ottenuta è molto vicina a 1 (massima efficienza possibile).

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOURBAKI, *Elements of Mathematics, Commutative Algebra*, Springer-Verlag (1989).
- [2] ORECCHIA F., *Points in generic position and the conductors of curves with ordinary singularities*, J. London Math. Soc., **24** (2) (1981), 85-96.
- [3] ORECCHIA F., *A polynomial algorithm for computing the conductor of points of a curve with reduced tangent cone*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, The Curves Seminar at Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, **VIII** (1991).
- [4] RAMELLA I., *Algoritmi di Computer Algebra relativi agli ideali di punti dello spazio proiettivo*, Tesi di Dottorato, Univ. Napoli, (1990).

Dip. Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata, Univ. di Salerno
e-mail: albano@ptn.pandora.it, albano@diima.unisa.it

Dottorato in Matematica Applicata e Informatica
(sede amministrativa: Napoli «Federico II») – Ciclo VIII

Direttore di ricerca: Prof. Ferruccio Orecchia

Dip. Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli» - Univ. di Napoli «Federico II»