Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Fausto Ferrari

Teoremi di confronto di tipo Harnack per funzioni armoniche in domini con frontiera hölderiana

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 113–116.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_113_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 113-116

Teoremi di confronto di tipo Harnack per funzioni armoniche in domini con frontiera hölderiana.

FAUSTO FERRARI

1. – Introduzione.

I risultati relativi al comportamento delle funzioni armoniche positive che si annullano alla frontiera in domini limitati $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ trovano applicazione nei teoremi di tipo Fatou, nei problemi di Dirichlet e Neumann con dati L^p, [1], [10] ed inoltre giocano un ruolo nella teoria della regolarità nei problemi di frontiera libera, [4], [5].

In particolare sono di primaria importanza i teoremi di tipo Harnack, vale a dire quei risultati in base ai quali è possibile affermare che le velocità con cui le funzioni armoniche positive si annullano alla frontiera sono tra loro confrontabili e la proprietà di duplicazione della misura armonica, cioè il fatto che due dischi concentrici alla frontiera hanno misura armonica equivalente. Da questo punto di vista il comportamento delle funzioni armoniche in domini lipschitziani, o più in generale in domini non tangenzialmente accessibili (N.T.A.), è stato ampiamente ed esaurientemente studiato nei lavori di Hunt e Wheeden [8], Dahlberg [7], Ancona [1], Caffarelli, Fabes, Mortola e Salsa [6] e Jerison e Kenig [9] per operatori uniformemente ellittici in forma di divergenza a coefficienti limitati.

Per esempio, quando la frontiera $\partial\Omega$ di un dominio limitato Ω è localmente il grafico di una funzione lipschitziana di costante $L > 0$, posto $x \in \partial\Omega$, $r \in \mathbf{R}^+$, $B_{x,r} = \{y \in \mathbf{R}^n : \|y - x\| < r\}$, $D_{x,r} = \partial\Omega \cap B_{x,r}$, $\Sigma_{x,r} = \Omega \cap B_{x,r}$, $A_{x,r} \in \Sigma_{x,r}$, $\|A_{x,r} - x\| = O(r)$ e $\operatorname{dist}(A_{x,r}, \partial\Omega) = O(r)$ per $r \to 0$, si ha il seguente teorema di Harnack alla frontiera.

TEOREMA 1. – *Esistono due costanti positive* $c(n, L)$ *e* r_0 *rispettivamente tali che se* $\Delta u = 0$, *in* Ω, $u_{|D_{x,2r}} = 0$ *e* $\Delta v = 0$, *in* Ω, $v_{|D_{x,2r}} = 0$, *allora per ogni* $0 < r < r_0$ *e per ogni* $y \in \Sigma_{x,r}$,

$$\frac{u(y)}{v(y)} \leqslant c \frac{u(A_{x,r})}{v(A_{x,r})}.$$

Inoltre vale la seguente formula di duplicazione della misura armonica Ω_Ω^x.

TEOREMA 2. – *Esistono due costanti positive, rispettivamente* $c(n, L)$ *e* r_0 *tali che per ogni* $0 < r < r_0$ *e per ogni* $y \in \Omega \backslash \Sigma_{x,3r}$,

$$\Omega_\Omega^y(D_{x,2r}) \leqslant c\,\Omega_\Omega^y(D_{x,r}).$$

A questo proposito sottolineiamo come in un dominio Ω, la cui frontiera $\partial\Omega$ è localmente data dal grafico di una funzione lipschitziana di costante L, sia possibile individuare per ogni $Q \in \partial\Omega$ e $0 < r < r_0$, con r_0 opportuno, un punto $A_{Q,r} \in \Omega$ tale che $C(M)r < \|A_{Q,r} - Q\| < r$ e dist $(A_{Q,r}, \partial\Omega) > C(M)\, r$, con $C(M)$ costante positiva, perché un cono di vertice V viene mutato da ogni omotetia di centro V nello stesso cono, tale proprietà è alla base della caratterizzazione degli spazi N.T.A., [9]; al contrario, i domini la cui frontiera è localmente il grafico di una funzione hölderiana di ordine $\alpha \in]0, 1[$ e costante M in generale non soddisfano un'analoga condizione, poiché i coni devono essere sostituiti da cuspidi algebriche. Inoltre, a differenza dei domini lipschitziani, non è detto che i punti di una frontiera hölderiana siano regolari per il problema di Dirichlet. La generalizzazione dei teoremi di tipo Harnack alla frontiera per domini hölderiani è contenuta nei lavori di Bañuelos, Bass e Burdzy, [4], [5], i quali hanno dimostrato con metodi probabilistici un principio di Harnack alla frontiera per operatori uniformemente ellittici in forma di divergenza a coefficienti limitati.

In questa nota forniremo alcune indicazioni relative alla dimostrazione non probabilistica del principio di Harnack alla frontiera che è conseguenza di un risultato, il cui corollario immediato è l'equivalente *locale* della formula di duplicazione, in base al quale è possibile fornire una stima della misura armonica, relativa ad opportuni insiemi cilindrici, di *porzioni disgiunte* della frontiera. Le funzioni armoniche sono intese come soluzioni alla Perron-Wiener-Brelot di un corrispondente problema di Dirichlet; in questo senso la soluzione alla Perron del problema di Dirichlet $\Delta u = 0$ in Ω, $u_{|\partial\Omega} = \chi_P$ valutata per $x \in \Omega$ è la misura armonica $\Omega^x_\Omega(P)$ dell'insieme P, misurabile secondo Borel, valutata in x.

2. – Notazioni principali e risultati.

Sia $\Gamma\colon \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ una funzione hölderiana di esponente $\alpha \in]0, 1[$ (cioè esiste $M > 0$ tale che per ogni $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbf{R}^{n-1}$, $|\Gamma(\tilde{x}) - \Gamma(\tilde{y})| \leq M\|\tilde{x} - \tilde{y}\|^{\alpha}$) e supponiamo che localmente il grafico della funzione Γ coincida con una porzione di frontiera del dominio Ω. Per ogni $x \in \Omega$, $(\tilde{x}, \hat{x}) \in \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$, r, b numeri positivi, indichiamo con

$$\triangle\,(x, r, b) = \{y \in \Omega\colon \Gamma(\tilde{y}) < \hat{y} < \Gamma(\tilde{y}) + b,\ \|\tilde{y} - \tilde{x}\| < r\}$$

il cilindro ottenuto per *traslazione della frontiera* di Ω di *asse* $\tilde{y} = \tilde{x}$, *raggio* r, *altezza* b e *frontiera laterale*

$$\partial^s \triangle\,(x, b, r) = \{y \in \partial\triangle\,(x, b, r)\colon \|\tilde{y} - \tilde{x}\| = r\}.$$

Definiamo inoltre

$$\partial^g \triangle\,(x, 2b, 2r) = \partial\triangle\,(x, 2b, 2r) \setminus (\partial\Omega \cup \partial^s \triangle\,(x, b, 2r)).$$

Il principio di Harnack alla frontiera per domini hölderiani può essere così enunciato.

TEOREMA 3. – *Siano $r \geq b$ numeri reali positivi, $x \in \Omega$, u e v due funzioni armoniche non negative in $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ che si annullano nei punti regolari di $\partial \triangle (x, 6b, 6r) \cap \overline{\triangle (x, 6b, 6r)}$ ed inoltre limitate in un intorno di $\partial \triangle (x, 6b, 6r) \cap \overline{\triangle (x, 6b, 6r)}$. Allora esiste una costante $c(b, r) > 0$ tale che per ogni $y, z \in \triangle (x, b, r)$*

$$\frac{u(y)}{v(y)} \leq c \frac{u(z)}{v(z)} .$$

Alla base di questo risultato troviamo una stima *da sotto* del rapporto

$$u(y)/G_{\Omega}(y, z)$$

per $y \in \triangle (x, b, r)$ (dove u è una qualunque funzione armonica soddisfacente le condizioni del principio di Harnack e $G_{\Omega}(y, z)$ la funzione di Green dell'insieme Ω di polo z fissato sufficientemente lontano da x) conseguenza del seguente teorema a cui abbiamo già accennato nell'introduzione.

TEOREMA 4. – *Siano $b \leq r$ numeri positivi e $x \in \Omega$. Esiste una costante positiva $c(b, r)$ tale che per ogni $y \in \triangle (x, b, r)$*

$$\omega^y_{\triangle (x, 2b, 2r)}(\partial^s \triangle (x, b, 2r)) \leq c\omega^y_{\triangle (x, 2b, 2r)}(\partial^g \triangle (x, 2b, 2r)) .$$

La dimostrazione, piuttosto laboriosa, si differenzia sostanzialmente da quella ottenuta con metodi probabilistici per il modo con cui si perviene al seguente risultato di cui daremo, per semplicità, un cenno della prova solo per il laplaciano.

LEMMA 1. – *Esiste una costante positiva $c \in (0, 1)$ tale che per ogni $y \in \triangle (x, b, b)$*

$$\omega^y_{\triangle (x, b, r)}(\partial^s \triangle (x, b, r)) \leq c^k,$$

dove $x \in \Omega$ mentre r, b sono due numeri reali positivi e $r = kb$, $k \geq 1$, $k \in \mathbf{N}$.

DIMOSTRAZIONE. – Sia

$$F_b = \{z \in \Omega : \hat{z} < \Gamma(\tilde{z}) + b\}$$

e per ogni $w \in F_b$ definiamo $Q(w, 2b, b) = \{y \in \mathbf{R}^n : |\tilde{y} - \tilde{w}| < b, |\hat{y} - \hat{w}| < 2b\}$. Per ogni $y \in \triangle (x, b, r)$ poniamo $u_k(y) = \Omega^y_{\triangle (0, b, kb)}(\partial^s \triangle (x, b, kb))$, mentre per ogni $y \in Q(w, 2b, b)$ sia $h_w(y) = \Omega^y_{Q(w, 2b, b)}(F_b \cap \partial Q(w, 2b, b))$. La misura armonica e la misura di superficie sono mutuamente assolutamente continue, perché $Q(w, 2b, b)$ è un dominio lipschitziano, [6], pertanto

$$0 < \sup_{w \in F_b} h_w(w) = c_1 < 1 .$$

Dal principio del massimo che segue $u_{k|\triangle (0, b, (k-1) b)} \leq p_{k-1}$ in $\triangle (0, b, (k-1) b)$, con p_{k-1} soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta p_{k-1}(y) = 0\,, & \triangle\,(0,\,b,(k-1)\,b)\,, \\ p_{k-1|\partial\triangle\,(0,\,b,(k-1)b)} = c_1 \chi_{\,\partial^s \triangle\,(0,\,b,(k-1)\,b)}\,. \end{cases}$$

Infine, per ogni $y \in \triangle\,(0,\,b,(k-1)\,b)$

$$u_k(y) \leq p_{k-1}(y) = c_1 u_{k-1}(y)$$

quindi iterando il procedimento otteniamo che per ogni $y \in \triangle\,(0,\,b,\,b)$,

$$u_k(y) \leq c_1^k. \qquad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ANCONA A., *Principe de Harnack à la frontier et theèorem de Fatou pour un opèratore elliptique dans un domaine Lipschitzien*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **28** (1978), 169-213.

[2] BAÑUELOS R., BASS R. e BURDZY K., *Hölder domains and the boundary Harnack principle*, Duke Math. J., **64** (1991), 195-200.

[3] BASS R. e BURDZY K., *A boundary Harnack principle for twisted Hölder domains*, Ann. of Math., **134** (1991), 253-276.

[4] CAFFARELLI L., *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries, Part I, Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$*, Revista Math. Iberoamericana, **3** (1987), 139-162.

[5] CAFFARELLI L., *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries, Part II, Flat free boundaries are Lipschitz*, CPAM, **42** (1989), 55-78.

[6] CAFFARELLI L., FABES E., MORTOLA S. e SALSA S., *Boundary behavior of non-negative solutions of elliptic operators in divergence form*, Indiana Univ. Math. J., **30** (1981), 621-640.

[7] DAHLBERG B., *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rat. Mech. Anal., **65**, (1977), 275-288.

[8] HUNT R. e WHEEDEN R., *On the boundary values of harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), 307-322.

[9] JERISON J. e KENIG C., *Boundary behavior of harmonic functions in Non-tangentially Accessible Domains*, Advances in mathematics, **46** (1982), 80-147.

[10] KENIG C., *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, CBMS, **83** (1994).

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna e C.I.R.A.M.
e-mail: ferrari@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. S. Salsa