Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Ciro D'Apice

Su alcune questioni di omogeneizzazione: formule di rappresentazione, domini perforati, funzionali non limitati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 105–108.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_105_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 105-108

Su alcune questioni di omogeneizzazione: formule di rappresentazione, domini perforati, funzionali non limitati.

CIRO D'APICE

La teoria dell'omogeneizzazione risulta uno strumento utile per l'approssimazione di modelli relativi a materiali aventi un alto grado di complessità, mediante altri modelli descriventi opportuni materiali, dedotti da quelli iniziali ed in generale più semplici da trattare, soprattutto al fine di un calcolo esplicito dei parametri e delle quantità incognite descriventi gli stessi (in genere soluzioni di problemi varazionali o equazioni differenziali).

Nella tesi sono stati esaminati alcuni modelli matematici che hanno una complessità rappresentata dalla dipendenza da un parametro (tendente a zero o a $+\infty$), dipendenza presente nel funzionale, nell'equazione e/o nella definizione del dominio in cui è posto il problema.

Il modello più interessante è costituito da un esempio che illustra un fenomeno di «interferenza» nello studio asintotico delle soluzioni dell'equazione di Laplace in un aperto Ω periodicamente perforato.

Una descrizione sintetica del fenomeno è la seguente (per semplicità la dimensione dello spazio è $N \geqslant 3$).

Si consideri un aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$, si fissa un parametro $\varepsilon > 0$, si «reticola» $\mathbf{R}^N$con piani ortogonali agli assi coordinati e distanziati di ε, ottenendo una partizione di $\mathbf{R}^N$ in cubi essenzialmente disgiunti (celle).

Si considerino le «celle» contenute in Ω e in ognuna di esse si produca, in modo periodico, un «buco» sferico di raggio $r_1(\varepsilon) = a \cdot \varepsilon^{N/N-2}$, $a > 0$.

In ogni cella suddetta si produca inoltre, sempre in modo periodico, un secondo «buco», questa volta cubico (ciò tornerà comodo sia per la dimostrazione, sia per ricordare il ruolo diverso dei due buchi) di lato $r_2(\varepsilon) = b \cdot \varepsilon^{N/N-1}$, $b > 0$ (quindi molto più grande del buco precedente).

I buchi sferici siano disposti in prossimità dei centri di una delle facce dei cubi corrispondenti, con il centro a una distanza $d_\varepsilon = \lambda a \cdot \varepsilon^{N/N-2}$ della faccia stessa $\lambda > 1$) cioè i buchi non si intersecano).

Siano: B_ε l'unione dei buchi sferici; C_ε l'unione dei buchi cubici; C un cubo di lato b; f una funzione data in $L^2(\Omega)$; g una funzione data in $L^2(\partial C)$; g_ε la funzione che si ottiene da g mediante periodizzazione e cambiamento di variabile in modo che assuma i valori di g sulla frontiera di ogni cubetto in C_ε.

Allora si prova facilmente che:

$$
\begin{cases}
-\Delta u = f & \Omega \backslash (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \\
u \in H^1(\Omega \backslash (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) & \\
u = 0 \quad su \ \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon & \\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = g_\varepsilon \quad su \ \partial C_\varepsilon &
\end{cases}
\tag{1}
$$

ha una ed una sola soluzione v_ε.

Utilizzando procedimenti noti le soluzioni v_ε possono essere prolungate su tutto Ω in modo tale che

$$
\|P_\varepsilon v_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \|\Delta v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega \backslash B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)}
\tag{2}
$$

dove $P_\varepsilon v_\varepsilon$ indica il prolungamento e la costante c non dipende da ε. Si vuole allora studiare il comportamento della successione $\{P_\varepsilon v_\varepsilon\}$ (al tendere di ε a zero).

Si osservi che se non vi fossero i «buchi» cubici C_ε è noto che la successione $\{P_\varepsilon v_\varepsilon\}$ convergerebbe debolmente in $H_0^1(\Omega)$ verso la funzione v soluzione di

$$
\begin{cases}
-\Delta v + \mu v = f \\
v \in H_0^1(\Omega)
\end{cases}
\tag{3}
$$

dove μ è il cosidetto «térme étrange» che in generale è in $H^{-1}(\Omega)$; tuttavia nel caso studiato $\mu = S_N(N-2)\, a^{n-2}$ è una costante (S_N è la superfice della sfera unitaria di $\mathbf{R}^n$) che rappresenta la capacità armonica di una sfera di raggio a in $\mathbf{R}^n$.

Se viceversa non vi fossero i buchi sferici B_ε è noto che la successione $\{P_\varepsilon v_\varepsilon\}$ convergerebbe debolmente in $H_0^1(\Omega)$ verso la funzione v soluzione di

$$
\begin{cases}
-\Delta v = f + c_g \\
v \in H_0^1(\Omega)
\end{cases}
\tag{4}
$$

dove la costante c_g dipende dal valore principale di g su ∂C.

Nel caso in esame viene provato che la successione $\{P_\varepsilon v_\varepsilon\}$ converge debolmente in $H_0^1(\Omega)$ verso la funzione v soluzione di

$$
\begin{cases}
-\Delta v + \dfrac{1}{2}\mu' v = f + c_g \\
v \in H_0^1(\Omega)
\end{cases}
\tag{5}
$$

dove la costante μ' rappresenta la capacità armonica di due sfere di raggio a i cui centri hanno distanza $2\lambda a > 2a$, pertanto $\mu < \mu' < 2\mu$. Nel problema finale risultano così presenti sia il termine di «flusso» c_g derivante dalla presenza dei buchi cubici C_ε sia un «terme etrange» μ' derivante dalla presenza di buchi sferici B_ε, ma quest'ultimo risulta essere modificato ed energeticamente meno rilevante di quello che si determina in assenza dei buchi C_ε.

Un'altro problema esaminato è quello del comportamento asintotico, al divergere di $h \in \mathbf{N}$, per ogni sottoinsieme aperto limitato Ω di $\mathbf{R}^n$, β in $L^1(\Omega)$, delle soluzioni del problema

$$m_h(\Omega, \beta) = \min \left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega f(hx, u, Du)\, dx + \int_\Omega \beta u\, dx : u \text{ Lipschitziana} \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega,\ |Du(x)| \leq \varphi(hx) \textit{ per q.o. } x \textit{ in } \Omega \end{array} \right\}, \qquad h \in \mathbf{N}.$$

Si prova, sotto opportune ipotesi, che se $\{u_h\}_{h \in N}$ è una successione di soluzioni del problema precedente allora la sottosuccessione convergente di $\{u_h\}_{h \in N}$ converge alla soluzione del problema

$$m_\infty(\Omega, \beta) = \min \left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega f_\infty(u, Du)\, dx + \int_\Omega \beta\ u\ dx: \\ u \text{ Lipschitziana}, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

dove f_∞ è definita come

$$f_\infty(s, z) = \min \left\{ \begin{array}{l} \int_{]0,1[^n} f(y, s, z + Dv)\, dy : v \text{ Lipschitziana}, \quad v]0,1[^n \\ \text{periodica}, \quad |z + Dv(y)| \leq \varphi(y) \text{ per q.o. } \ y \ \textit{in} \ ]0,1[^n \end{array} \right\}$$

(dove si è assunto nell'ultima uguaglianza $\min \emptyset = +\infty$).

Viene anche analizzato nel contesto del fenomeno di Lavrentieff il seguente problema di Dirichlet:

$$m_h^p(\Omega, \beta) =$$

$$= \inf \left\{ \begin{array}{c} \int_\Omega f(hx, Du)\, dx + \int_\Omega \beta u\, dx : u \in W^{1,p}(\Omega) \ \ (u \in C^1(\Omega) \text{ se } p = 'c1') \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \quad |Du(x)| \leq \varphi(hx) \textit{ per q.o. } x \textit{ in } \Omega \end{array} \right\}$$

dove Ω è un sottoinsieme aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ con frontiera Lipschiziana, β è in $L^1(\Omega)$, p è in $]n, +\infty]$ o $p = 'c1'$.

Si prova sotto opportune ipotesi che

$$\lim_{h \to +\infty} \{m_h^p(\Omega, \beta)\}_{h \in N} = m_{\text{hom}}^p(\Omega, \beta) =$$

$$= \inf \left\{ \begin{array}{c} \int_\Omega f_{\text{hom}}^p(Du)\, dx + \int_\Omega \beta u\, dx: \\ u \in W^{1,p}(\Omega) \ \ (u \in C^1(\Omega) \text{ se } p = 'c1') \ \ u = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

dove f^p_{hom} è una funzione convessa da $\mathbf{R}^n$ a $[0, +\infty]$ definita da

$$f^p_{\text{hom}}(z) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_Y f(y, z + Du)\, dy : u \in W^{1,p}(Y) \quad (u \in C^1(Y) \text{ se } p = 'c1'), \\ \qquad u \ Y\text{-}periodica, \quad |z + Du(y)| \leq \varphi(y) \ q.o. \ in \ Y \end{array} \right\}$$

(si assume $\inf \emptyset = +\infty$).

È possibile verificare con alcuni esempi che la funzione f^p_{hom} realmente dipende da p.

Infine si studiano alcuni problemi di omogeneizzazione, per ε che tende a zero, di una classe di funzioni a valori matriciali di ordine $(n+p) \times (n+p)$ del tipo $A(x, x'/\varepsilon)$, dove $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}) \in \mathbf{R}^{n+p}$ e $x' = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, con $n \geq 1$. Questo tipo di problemi nasce, in particolare, dallo studio del comportamento asintotico di alcuni problemi ellittici di trasmissione in domini separati da una frontiera oscillante. In particolare si ottiene la rappresentazione della matrice omogeneizzata.

Nella bibliografia seguente vengono segnalati solo quegli articoli dai quali più direttamente è stato ispirato il lavoro svolto nella tesi, pur non contenendo essi in generale i risultati attualmente più avanzati nei rispettivi soggetti. Per completezza viene data l'indicazione di un volume che ha una bibliografia assai vasta sul tema dell'omogeneizzazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carbone L. and Salerno S., *On a problem of homogeneization with quickly oscillating constraints on the gradient*, J. Math. Anal. Appl., **90** (1982), 219-250.

[2] Cioranescu D. and Murat F., *Un terme étrange venu d'ailleurs*, Nonlinear Partial Differential Equations and their applications. Collège de France Seminar, **II** (1982), 98-138.

[3] Conca C. and Donato P., *Non Homogeneous Neumann's problems in domains with small holes*, RAIRO Modèl. Math. Anal. Numr., **22** (1988), 561-607.

[4] Corbo Esposito A. and De Arcangelis R., *The Lavrentieff Phenomenon and different Process of Homogenization*, Comm. Part. Diff. Eq., **17** (1992), 1503-1538.

[5] Dal Maso G., *An Introduction to Γ-Convergence*, Progress in Nonlinera Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser Boston, 8 (1993).

Dip. di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata, Università di Salerno
e-mail: dapice@diima.unisa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli «Federico II») - Ciclo VII
Direttore di ricerca: Prof. Luciano Carbone
(Dip. Mat. e Appl. «R. Caccioppoli» Univ. di Napoli «Federico II»)