
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ALESSANDRA CUTRÌ

Problemi semilineari ed integro-differenziali per Sublaplaciani

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.1S (Supplemento
Tesi di Dottorato), p. 101–104.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_101_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_101_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Problemi semilineari ed integro-differenziali per Sublaplaciani.

ALESSANDRA CUTRÌ

La tesi riguarda lo studio di problemi differenziali semilineari ed integro-differenziali associati ad alcuni operatori ellittici degeneri (di tipo subellittico): i cosiddetti sublaplaciani su gruppi di Lie stratificati, i.e. operatori della forma

$$L = \sum_{i=1}^m X_i^2$$

dove i campi X_i generano l'algebra di Lie dei campi vettoriali invarianti a sinistra rispetto all'azione $\circ$ di un gruppo stratificato $(G, \circ)$.

Questi operatori assumono su $(G, \circ)$ lo stesso ruolo giocato dall'operatore di Laplace Δ su $(R^n, +)$. Peraltro, se $G = (R^n, +)$, l'operatore L è l'operatore di Laplace. In generale L non è un operatore uniformemente ellittico. Tuttavia, essendo G un gruppo stratificato, i campi X_i verificano la condizione di generazione di Hörmander e di conseguenza L è un operatore subellittico.

Tra questi operatori assume un ruolo primario il laplaciano di Kohn-Heisenberg Δ_{H^n} (vedi [11]), sublaplaciano sul gruppo di Heisenberg $H^n := (R^{2n+1}, \circ)$ con $\circ$ definita da

$$\xi_0 \circ \xi = \left(x + x_0, y + y_0, t + t_0 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i y_{0i} - y_i x_{0i}) \right),$$

con $\xi = (x, y, t) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) \in R^{2n+1}$. In tal caso i campi X_i sono definiti da:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{n+i} = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}$$

per $i = 1, \dots, n$ e l'operatore

$$\Delta_{H^n} = \sum_{i=1}^{2n} X_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 4y_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} - 4x_i \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial t} + 4(x_i^2 + y_i^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Tale operatore costituisce uno dei più importanti esempi di sublaplaciano in quanto interviene nello studio di varietà CR modellate su H^n ed è stato studiato in dettaglio da molti matematici. In particolare, vorrei citare Jerison che si è occupato di regolarità di soluzioni '81, e con Lee ha affrontato il problema di Yamabe su varietà CR (vedi [10]) e Garofalo-Lanconelli che in [7] hanno studiato alcuni problemi semilineari.

Nella prima parte della tesi, dopo aver dimostrato un teorema di Liouville lineare per i sublaplaciani che afferma che le uniche funzioni limitate e L -armoniche su G (i.e. tali che $Lu = 0$) sono le funzioni costanti, analogamente a quanto ac-

cade per le funzioni armoniche, si provano alcuni teoremi di tipo Liouville per problemi semilineari. Per il problema modello

$$(1) \quad u \geq 0, \quad Lu + u^\alpha \leq 0 \quad \text{in } G,$$

il teorema di Liouville dimostrato asserisce che se $1 < \alpha \leq Q/Q - 2$, (ove Q è la dimensione omogenea di G), l'unica soluzione è $u \equiv 0$. Si stabilisce inoltre che la limitazione superiore dell'esponente α è ottimale per la disequazione. Questo tipo di risultati viene esteso anche ad una classe di operatori ellittici degeneri che non rientrano nella tipologia dei sublaplaciani su gruppi di Lie stratificati non essendo invarianti a sinistra rispetto ad alcuna azione di gruppo su R^n . L'esempio più significativo che si considera è l'operatore di Grushin definito in $R^n = R^p \times R^q$ da

$$(2) \quad L = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + |x|^{2k} \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}, \quad \text{con } k \in N, (x, y) \in R^p \times R^q.$$

Tale risultato per l'operatore di Laplace Δ e nel caso dell'equazione è stato stabilito da Gidas e Spruck in [9].

Per il laplaciano di Heisenberg vengono dimostrati anche altri teoremi di Liouville non lineare relativi ai semispazi e a particolari coni usando tecniche simili a quelle del lavoro di Berestycki, Capuzzo Dolcetta e Nirenberg riguardante il laplaciano, vedi [1]. L'upper bound dell'esponente α in questo caso dipende dal semispazio che si considera. In particolare, è lo stesso per i semispazi $\{x_i \geq 0\}$ e $\{y_i \geq 0\}$ ma è diverso per il semispazio $\{t \geq 0\}$, come appare ragionevole osservando che la direzione individuata dall'asse t gioca un ruolo diverso. La validità di tali teoremi prescinde dal comportamento all'infinito delle soluzioni ed in questo si differenzia da risultati di non esistenza provati da N. Garofalo e E. Lanconelli in [7] che, essendo basati sull'identità di Rellich-Pohozaev, richiedono condizioni globali di sommabilità per la soluzione e per il suo gradiente.

I teoremi di Liouville consentono di dimostrare stime a priori, nella norma L^∞ , per le soluzioni $u \in \Gamma^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (Γ^2 è lo spazio di Hölder-Stein) di

$$(3) \quad \begin{cases} u \geq 0, & \Delta_{H^n} u + f(\xi, u) + \tau = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

quando la nonlinearità f soddisfa:

$$f(\xi, s) = h(\xi) s^\alpha \quad \text{per } s \text{ grande, con } 1 < \alpha < \frac{Q-1}{Q-2}, \quad (Q = 2n+2) \quad h \in C^2(\Omega),$$

$$\Omega^+ := \{\xi : h(\xi) > 0\} \neq \emptyset, \quad \Gamma := \{\xi : h(\xi) = 0\} \cap \partial\Omega = \emptyset, \quad \nabla h(\xi) \neq 0, \quad \forall \xi \in \Gamma.$$

Tali stime, che dipendono da Ω e da α ma sono indipendenti dalla costante $\tau > 0$ e da u , sono ottenute con una tecnica di blow-up opportunamente adattata alla struttura naturale di H^n . Una tecnica simile per dimostrare stime a priori nel caso uniformemente ellittico è stata usata da Gidas e Spruck in

[9] per problemi con nonlinearità positiva e da Berestycki, Capuzzo Dolcetta e Nirenberg in [1] per nonlinearità di tipo indefinito.

Rispetto al caso uniformemente ellittico, in questo ambito si presentano delle difficoltà dovute alla presenza dei *punti caratteristici* (quando i centri del blow up tendono ad un punto caratteristico per l'insieme di livello della funzione φ che descrive $\partial\Omega$ o Γ cioè ad un punto ξ_0 che verifica $X_i\varphi(\xi_0) = 0$ per $i = 1, \dots, 2n$.) paragonabili allo studio di problemi uniformemente ellittici su domini con punti conici. Queste difficoltà vengono superate utilizzando la seguente condizione su $\partial\Omega$ e sull'insieme degli zeri Γ della funzione h :

$\nabla_H^2\varphi(\xi_0)$ semidefinita positiva in ogni punto caratteristico ξ_0

ove $\nabla_H^2\varphi$ denota la matrice «Hessiana» di φ rispetto ai campi vettoriali X_i .

Mediante il blow up si giunge ad un problema tipo

$$v \geq 0 \quad \Delta_{H^n} v + a(\xi)v^\alpha = 0 \quad \text{in } D$$

dove D è un semispazio o l'intero spazio e si ottiene la stima utilizzando uno dei teoremi di Liouville precedentemente dimostrati.

Tali stime a priori e dunque i teoremi di Liouville permettono di dimostrare un teorema di esistenza di soluzioni negli spazi di Hölder-Stein del problema semilineare

$$\begin{cases} u > 0, & \Delta_{H^n} u + f(\xi, u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

sotto l'ulteriore ipotesi $f(\xi, 0) = f_u(\xi, 0) = 0$ utilizzando la teoria del grado topologico. Problemi semilineari associati al Δ_H sono stati affrontati precedentemente da Garofalo e Lanconelli in [7] relativamente a nonlinearità positive e verificanti un'ipotesi di struttura di tipo Rabinowitz che consente di applicare tecniche tipo Mountain Pass per dedurre l'esistenza di soluzioni deboli.

L'ultima parte della tesi riguarda lo studio di un problema integro-differenziale sul gruppo di Heisenberg. Più precisamente, accanto al Laplaciano di Heisenberg, generatore di un processo di diffusione, come dimostrato da Folland nel '81, vengono definiti opportunamente operatori integro-differenziali che simulano processi di diffusione con salto su tale gruppo. Usando metodi analitici, vengono generalizzati alcuni risultati validi per gli operatori uniformemente ellittici, stabiliti da Bensoussan, J.L. Lions nell'81 e successivamente da M.G. Garroni e J.L. Menaldi nel '92 per salti non costanti, vedi [8]. In particolare, viene dimostrata esistenza, unicità e regolarità ottimale negli spazi di Sobolev-Stein per la soluzione del problema al contorno:

$$\begin{cases} -\Delta_{H^n} u - I_H u + \lambda u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove Ω è un dominio convesso rispetto ai campi X_i , $f \in L^2(\Omega)$, $\lambda \geq 0$ è un parame-

tro e I_H è l'operatore integro-differenziale:

$$I_H \varphi(\xi) = \int_F [\varphi(\xi \circ j(\xi, \zeta)) - \varphi(\xi) - \tilde{j}(\xi, \zeta) \cdot \nabla_H \varphi(\xi)] m(\xi, \zeta) \pi(d\zeta)$$

dove $j(\xi, \zeta)$ sono salti opportunamente adattati all'azione di gruppo. A tal fine, viene dimostrato un lemma analogo al lemma delle traslazioni di Nirenberg che consente di determinare una stima a priori della soluzione.

Gli argomenti esposti nella tesi di dottorato sono in parte pubblicati sui lavori [2, 3, 4, 5, 6] ai quali si rimanda per maggiori dettagli e riferimenti bibliografici.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERESTYCKI H., CAPUZZO DOLCETTA I. and NIRENBERG L., *Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, **4**,1 (1995), 59-78.
- [2] BIRINDELLI I. and CUTRÌ A., *A Semi-linear problem for the Heisenberg Laplacian*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, **94** (1995), 137-153.
- [3] BIRINDELLI I., CAPUZZO DOLCETTA I. and CUTRÌ A., *Liouville theorems for semilinear equations on the Heisenberg group*, Annales de l'Institut Henri Poincaré-Analyse Non Linéaire, **14**,3 (1997), 295-308.
- [4] BIRINDELLI I., CAPUZZO DOLCETTA I. and CUTRÌ A., *Indefinite semi-linear equations on the Heisenberg group: a priori bounds and existence*, Commun. in Partial Diff. Eq., in corso di stampa.
- [5] CAPUZZO DOLCETTA I. and CUTRÌ A., *On the Liouville property for sublaplacians*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, in corso di stampa.
- [6] CUTRÌ A., and GARRONI M.G., *Existence, uniqueness and regularity results for integro-differential Heisenberg equations*, Advances in Differential Equations, **1**,6 (1996), 939-963.
- [7] GAROFALO N. and LANCONELLI E., *Existence and non existence results for semilinear equations on the Heisenberg group*, Indiana Univ. Math. Journ., **41** (1992), 71-97.
- [8] GARRONI M.G. and MENALDI J.L., *Green functions for parabolic second order integro-differential problems*, Pitman-Longman, London, (1992).
- [9] GIDAS B. and SPRUCK J., *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Commun. Partial Diff. Eq., **6**, 8 (1981), 883-901.
- [10] JERISON D.S. and LEE J.M., *The Yamabe Problem on CR manifolds*, J. Differential Geometry, **25** (1987), 167-197.
- [11] STEIN E.M., *Harmonic analysis: real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton Univ. Press, (1993).

Dipartimento di Matematica, Università «Tor Vergata», Roma
e-mail: cutri@axp.mat.uniroma2.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma) - Cielo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Italo Capuzzo Dolcetta, Università di Roma «La Sapienza»