
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

EMMA CASTELNUOVO

È possibile un'educazione al “saper vedere” in matematica?

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 22
(1967), n.4, p. 539–549.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_539_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

È possibile un'educazione al "saper vedere,, in matematica?

EMMA CASTELNUOVO (Roma)

Sunto. - *L'Autrice prende lo spunto dalla recensione a un volumetto di B. De Finetti "Il saper vedere in matematica,, per indicare la linea di una didattica della matematica nella scuola secondaria di 1° grado.*

Il «saper vedere» in matematica

E' uscito recentemente un volumetto dal titolo «Il "saper vedere,, in matematica» (1); autore ne è un professore universitario noto negli ambienti scientifici per ben altri valori: BRUNO DE FINETTI.

I matematici, che lo conoscono su un'altra sfera, si chiedono: «come è venuto in mente al DE FINETTI di scrivere per ragazzi o forse per insegnanti (perchè, in verità, il lettore può essere il più vario) su questioni che vengono trattate nella scuola secondaria, e soprattutto in quella di 1° grado?» L'insegnante, maestro o professore di scuola media, che non conosce il DE FINETTI, sfogliando il libro si dice: «l'autore deve essere uno di noi, più libero, però, di noi; con un linguaggio matematico più aperto, un linguaggio che sembra quello di tutti i giorni perchè sono problemi semplici e naturali che portano a "far della matematica,,».

Vorrei rispondere agli uni e agli altri con le parole stesse di BRUNO DE FINETTI, delle parole scritte circa venticinque anni fa nella prefazione ad un suo testo universitario «Matematica logico-intuitiva» (2). Parlando dell'importanza delle tante esemplificazioni e delle applicazioni che vi ha inserito, egli dice: «Si realizzerà così quello che anche nella realtà dello sviluppo storico costituisce il vero stimolo al progresso e all'evoluzione delle idee: il continuo scaturire di idee generali da problemi particolari, e di osservazioni particolari da teorie generali, il continuo trapasso dal concreto all'astratto e dall'astratto al concreto, finchè si fondano

(1) Collana «La Ricerca», Serie Didattica; Loescher Editore, Torino.

(2) Edizioni Cremonese, Roma.

nell'intuizione di un'unica magica realtà, in cui tutte le risorse concettuali vengono messe al servizio della visione pratica dei problemi e tutti i problemi pratici concorrono a servizio dell'elaborazione concettuale, questa e quella, volta a volta, mezzo e fine, superando ogni antagonismo». «Queste premesse-così continua riferendosi all'impostazione che ha dato al testo-varranno a spiegare la ragione di quello che altrimenti potrebbe apparire uno squilibrio sconcertante fra l'elevatezza dell'impostazione d'insieme e la grossolanità di talune considerazioni o esemplificazioni cui si appoggia, o anche, per scendere a un dettaglio, la voluta materialità di certe immagini: perchè, ad esempio, parlando di ellissi ottenute da sezioni oblique di un cilindro ci si dovrebbe inibire di dar corpo e sapore al concetto materializzandolo nell'immagine dell'affettare un salame? Dire «cilindro» è preferibile se ed in quanto tale termine astratto risvegli molte sensazioni concrete anzichè una sola: oltre che salame anche colonna o tubo o torrione ecc., ma è esiziale quando in esso non si sia imparato a vedere nè un salame nè una colonna o tubo o torrione o null'altro salvo una figura che si trovi nei testi di geometria per servire di pretesto a interrogazioni e bocciature. Perchè il primo problema è non tanto quello di far apprendere la matematica, ma di farla comprendere come qualcosa di vivo nel regno del pensiero... E farla comprendere significa anzitutto farla amare, farla sentire non arida, avulsa dai pensieri e meditazioni e preoccupazioni d'ogni giorno, ma ad essi siffattamente frammista da far apparire all'opposto arido e opaco il pensiero che non sappia attingere alla sua luce». E, dopo, entrando ancor più nel cuore della didattica, così si esprime: «Nello studio della matematica, più che di insegnarla si tratta di aiutare a reinventarla».

Questa frase, scritta nella prefazione di un libro universitario, si addice perfettamente anche all'insegnamento medio, perchè il metodo di scoperta è sempre lo stesso: aiutare gli allievi a ricostruire la matematica, a costruirne, da immagini superficiali, le vere fattezze, dando corpo così a quelle prime impressioni. Il disegno riprodotto sulla copertina del volumetto «Il "saper vedere", in matematica» sembra che voglia esprimere proprio questa idea: un occhio, e dei numeri, «specchiati», quali si formano sulla retina. Il pensiero, inconsciamente, ce li fa apparire «alla diritta». E così, noi maestri, dovremmo fare in modo che la prima, superficiale immagine che il bambino percepisce di un oggetto o di una situazione matematica si traduca, inconsciamente, in un «concreto», più concreto dunque dell'immagine, ma nello stesso tempo più astratto.

Questo è il problema della didattica della matematica ad ogni grado d'insegnamento ma particolarmente vivo al livello della scuola secondaria di 1° grado a cui il DE FINETTI più che altro intende riferirsi.

Ma, prima di venire al problema didattico che c'è dietro al volumetto in questione, vorrei sfogliarlo con voi per riportare qualche titolo, qualche argomento: argomenti che appaiono come tanti vivacissimi flash, legati fra loro da una linea: «il saper vedere» in matematica.

Sotto il titolo «Riflettere per giungere a un risultato» sono raccolti tre esempi di scoperte matematiche, esempi ben diversi per argomenti e per l'epoca in cui si sono presentati: si parla dello schiavo di Menone e della duplicazione del quadrato; dello scolareto Gauss e della somma dei primi 100 numeri naturali; e infine di un ragazzo dei nostri giorni che ha trovato un modo semplicissimo per il calcolo del volume del tetraedro regolare. Ma questi problemi non «si chiudono» con la risoluzione, perchè da ciascuno di essi ne sorgono di nuovi — «fate che il seme non vada sprecato» dice l'autore — se ci si abitua a vedere la figura o l'oggetto matematico, quale può essere la somma di numeri naturali, da un punto di vista dinamico. Siamo invitati a «riflettere ancora»: e se i numeri fossero più di 100? Se fossero n ? E siamo anche invitati, a proposito delle altre questioni, a fare dei calcoli, dei calcoli semplicissimi per renderci conto di come variano l'area di un quadrato e il volume di un cubo al variare del lato: piccole differenze nelle dimensioni portano infatti a notevoli alterazioni nelle aree e nei volumi; si va ad un problema generale, teorico. Ma, nel contempo, il cucchiaino (di zucchero che è preso come unità di misura nelle ricette di cucina e anche nell'indicazione di prescrizioni medicinali ci fa riflettere che nella vita di ogni giorno siamo abituati ad agire con una certa leggerezza: i cucchiaini non sono tutti uguali e anche una piccola differenza nelle dimensioni provoca una grande alterazione nel contenuto. È un continuo passare dal concreto all'astratto e dall'astratto al concreto; è un «matematizzare» la vita quotidiana. La gente pensa — dice DE FINETTI — che il far della matematica significhi librarsi nelle astrazioni o essere in grado di seguire una catena di passaggetti formali; e ritiene che le cose d'ogni giorno, dalle ricette di cucina al ragionare se verrà bello o brutto tempo, o al prevedere quale squadra di calcio vincerà nei concorsi tipo Totocalcio, nulla abbiano a che vedere con la matematica.

I problemi matematici appartengono ai grandi scienziati — così pensa la gente. L'autore vuol far capire con le sue pagine che

non è così; vuole «s drammatizzare» la situazione: tutti possono imparare «a saper vedere» in matematica, anche se non «ultra-vedere». Basta riflettere, basta utilizzare le proprie cognizioni senza mai abusarne, basta collegare un argomento all'altro guardando le cose con semplicità, come se si fosse bambini.

Sotto il titolo «Saper vedere le cose concrete» sono raccolti degli interessantissimi problemi. Eccone uno: come si dispone un filo a cappio infilato nella punta di un cono e teso in un punto verso il basso, ad esempio mediante un peso? La risoluzione è ovvia: il filo si dispone secondo la linea più breve, cioè la retta, ossia la linea che diventa retta spianando il «mantello» del cono. Di qui siamo portati a generalizzare e ci si trova a parlare di geodetiche. E poi, il parlar di minimo ci conduce a problemi di carattere economico. Si collega: è come se ci passasse davanti agli occhi una serie di diapositive, non scelte a caso, ma tali che vista la prima si può forse prevedere una delle successive tanto sono chiari i legami. E i legami, in matematica, consistono in formule e in funzioni: sono delle lettere unite da segni che fanno muovere le figure, le deformano, provocano delle trasformazioni in tutto lo spazio in cui siamo immersi: si è portati a lavorare sull'astratto, ma il concreto è lì, sempre presente, per offrirci continuamente il modo di attingere e di verificare.

Poi, un titolo che sembra strampalato «Sommare punti: idea geniale!» ci fa fare un altro gradino verso l'astrazione. Siamo appunto incoraggiati a «sommare punti» e ci troviamo a costruire così tutta la geometria affine con l'uso dei vettori: una matematica che non è solo quella di figure o di spazi che godono di certe proprietà, ma è anche quella di problemi economici e statistici, ove si rappresenti con un punto ad esempio un complesso di merci. Si passa così, senza accorgersene, da un concreto — un problema di merci — a un astratto, per poi, subito, vedere il risultato nel concreto, e il concreto ci obbliga alle approssimazioni; quale approssimazione si deve prendere? Come riflettere in termini di probabilità? Che cosa possiamo affidare ai cervelli elettronici? cosa pretendere? Quale è la funzione del nostro cervello nei confronti di quelli? Che cosa rimane da studiare?

Occorre «s drammatizzare» — dice ancora DE FINETTI: non presentiamo la matematica come qualcosa di superiore, opera di grandi, avulsa dai piccoli problemi d'ogni giorno; perchè — sembra voler dire — tutti gli uomini sono in grado di fare della matematica, tutti saranno in grado se faremo «sentire» i problemi, se li faremo amare.

A chi è affidato questo compito? È chiaro, a noi insegnanti di matematica, al primo matematico che il bambino incontra nel suo corso di studio: il professore della scuola media di tutti. Un triennio « insieme » ha una notevole influenza sulla formazione intellettuale dei bambini, i bambini che saranno domani « gli uomini » di cui parla BRUNO DE FINETTI.

Nelle pagine che seguono ho cercato di esporre qualche idea sul come indirizzare al « saper vedere » in matematica, e mi è sembrato che il modo più efficace fosse quello di « far entrare » il lettore in una classe di scuola media, riferendo delle difficoltà incontrate dai bambini, delle loro osservazioni, delle loro scoperte.

Come si indirizza al « saper vedere » in matematica?

Le generazioni di allievi si moltiplicano, a triennio succede triennio. Cambiano le mode, si evolvono i costumi; i bambini di 11 anni che riceviamo oggi alla scuola media sono ben diversi da come eravamo noi a quell'età, e sono molto diversi, anche, dai loro coetanei di dieci anni fa: sono più spigliati, più disinvolti, più « grandi » insomma.

Eppure, ad una serie di questioni di geometria e di aritmetica che si presentano nei primi giorni di scuola vengono date le stesse risposte oggi come ieri, dai bimbi di città come da quelli di campagna, dai figli di professionisti come da quelli di famiglie che non hanno una tradizione culturale.

— I bambini non vedono che se un quadrato articolabile si trasforma in rombo l'area cambia, e sostengono che siccome il perimetro rimane invariato anche l'area deve rimanere invariata.

— Non vedono che se uno spago legato viene tenuto a mo' di rettangolo fra l'indice e il pollice delle due mani, avvicinando e allontanando le dita di una stessa mano l'area cambia, e sostengono anche qui che l'area non può cambiare perchè il perimetro è sempre lo stesso, e avvalorano questa tesi dicendo che se diminuisce l'altezza del rettangolo aumenta la base e quindi le dimensioni si compensano.

— Per disegnare un triangolo equilatero non esitano a tracciare l'altezza uguale alla base.

— Sono convinti, i bambini, che se la somma dei primi 10 numeri naturali è uguale a 55, la somma dei primi 20 dovrà essere 110.

— Affermano con sicurezza che il prodotto di due numeri è sempre maggiore di ciascuno dei fattori.

— Rimangono poi smarriti alla domanda: « se di due numeri uno è doppio dell'altro e la loro somma è 21 quanto valgono i due numeri? »

Perchè affermano cose assurde mentre si comportano da adulti in questioni della vita d'ogni giorno ben più complesse? Perchè non vedono? In alcuni di questi problemi si tratta, in fondo, solo di guardare un oggetto. Eppure non c'è mai stata un'epoca come l'attuale in cui il senso della vista sia tanto esercitato; sappiamo benissimo quale attrazione esercitino i fumetti e la televisione. Ma, facciamo un esempio di tutti i tempi: un bambino, fin dalla più tenera età, non si stanca di osservare un mulino 'che ruota sotto la spinta dell'acqua, o una gru che sale e scende. È vero, ma un mulino fermo non gli interessa più e nulla gli dice una gru che non è in azione.

Ora, in matematica, non sono abituati a vedere situazioni dinamiche, per cui un quadrato snodabile o uno spago tenuto a mo' di rettangolo variabile nulla dicono loro: perchè « non sanno vedere ». Vogliamo scuoterli? Attiriamo la loro attenzione sul fatto che il quadrato-rombo può « schiacciarsi » e che il rettangolo di spago può ridursi a due fili sovrapposti. I casi « limite » parlano da sé: due oggetti mobili che non erano fino ad ora per nulla significativi diventano d'un tratto un problema matematico. E, in un secondo tempo, questi problemi saranno tradotti in formule, e allora il « saper vedere » la figura equivarrà al « saper vedere » la formula.

E perchè questi bambini non sanno rispondere alla domanda « se di due numeri uno è doppio dell'altro e ...? » Qui davvero non possono vedere finchè non diamo qualche cosa da vedere: la parola « numero » non dice nulla. Ma se concretizziamo un numero con uno stecchino il problema apparirà subito chiaro: perchè, se uno stecchino rappresenta il numero più piccolo, il più grande sarà rappresentato da due stecchini. La loro somma vale 21; vuol dire che tre stecchini danno 21. Allora... Il bambino, adesso, è costretto a vedere: gli stecchini, il suo strumento di lavoro, li ha in mano, ed è lui che traduce in una costruzione concreta un problema che gli sembrava tanto difficile. E noi sappiamo che la costruzione che il bambino fa si identifica con l'impostazione di un'equazione di primo grado, dove l'incognita è « lo stecchino ».

Basterebbero questi esempi per capire come l'atteggiamento matematico sorga dal « saper vedere » un concreto dinamico, costruttivo.

Mi propongo ora di approfondire la questione prendendo in esame un argomento particolare che sviluppo lungo tutto il

triennio: le trasformazioni affini. Attribuisco a questo argomento una grande importanza sia come preparatorio ad un corso assiomatico (per coloro che continueranno gli studi secondari) sia come particolarmente indicato per legare il mondo della natura e della tecnica a quello della matematica pura.

Siamo nei primi giorni della 1^a classe: i bambini hanno in mano un quadrato articolabile e un rettangolo articolabile. Il quadrato si trasforma in rombo, il rettangolo in parallelogramma. Hanno già osservato gli elementi metrici che variano in questa trasformazione (come gli angoli, le diagonali, l'area) e quelli che non variano (come il perimetro, la somma degli angoli). Non osservano invece, se non attiriamo la loro attenzione, un invariante non metrico: il parallelismo dei lati.

Li abitueremo a dire che quadrato, rombo, rettangolo, parallelogramma sono figure affini; e, come di sfuggita, attireremo la loro attenzione sulle ombre date dai raggi del sole, sul pavimento o sulla parete, dei riquadri della finestra: anche nelle ombre date dal sole si mantiene il parallelismo.

Negli anni successivi riprendiamo il quadrato articolabile per esaminare più a fondo la sua trasformazione in rombo. Si dice: « guardate: che cosa accade di un punto del quadrato quando il quadrato si trasforma in rombo? » È facile rispondere se si tratta di un punto sul contorno del quadrato, ma la questione porta ad un grosso problema se il punto è pensato come interno al quadrato. « Difatti, mentre si capisce — rispondono — che ad ogni punto del quadrato corrisponderà un punto del rombo e viceversa, come si concilia tutto questo con il fatto che l'area del quadrato è maggiore di quella del rombo? » « Da una parte “vedo,, — qualcuno dice —, ma dall'altra “non vedo più,, ». Ma il « non vedere » porta, in questo caso, ad « ultravedere »: il concreto si idealizza a poco a poco. Qualcuno dice: « è come se i punti nel quadrato fossero più distanziati, e quando articoliamo il quadrato s'infittiscono sempre di più fino a... » Si capisce come in questo caso il concreto non dia una giustificazione: per vedere si è condotti alla concezione del punto senza dimensioni, si è dunque costretti all'astratto.

Ma noi volevamo portare i bambini a fissare una corrispondenza: come si può trovare il corrispondente di un punto che si trova nell'interno del quadrato? A questa domanda sono molti a rispondere suggerendo di tendere due fili, o due sbarrette, paralleli ai lati del quadrato e passanti per quel punto. D'un tratto si vede: il quadrato si può « quadrettare », e ogni punto si può pensare individuato da due coordinate. Da questo momento il bambino non vede più soltanto il quadrato quadrettato, ma è come se il

« recinto » non ci fosse più: è l'intero piano che gli appare quadrato. Non vi è più, dunque, una figura — il quadrato — che si trasforma, ma è il piano che si trasforma. Questo passaggio dalla trasformazione della figura alla trasformazione del piano, e quindi dello spazio, è estremamente importante, ed è molto significativo che il bambino l'abbia « visto » da sé.

Quel quadrato quadrato, che si può facilmente realizzare con le aste del meccano, rappresenta un modello in piccolo della situazione che si realizza nell'intero piano; su questo modello, articolandolo, il bambino « legge » le varie proprietà dell'affinità (si tratta di un'affinità particolare).

Se attorno alle viti del meccano (i nodi del reticolato) si passano degli elastici, si potranno realizzare dei poligoni e vedere come si trasformano dopo la deformazione del quadrato a rombo. Ma i ragazzi non si contentano; vi domanderanno subito: « come si può vedere la figura trasformata di una a contorno curvilineo? ». Sono loro stessi che, qualche anno fa, hanno avuto l'idea di realizzare un quadrato « molto più fitto », una rete (tipo canovaccio in cui sia visibile la trama) fissata a quattro listelli incernierati; sulla rete si può disegnare una qualunque figura (ad esempio un cerchio) ed osservare come si trasforma in seguito all'articolazione.

Siamo noi, ora, che li riportiamo alla realtà: vogliamo studiare una trasformazione affine meno particolare di quella che otteniamo articolando un quadrato. Noi viviamo in uno spazio affine — lo spazio illuminato dai raggi del sole — senza farci caso: i bambini non hanno mai osservato, infatti, che le ombre del sole mantengono il parallelismo, e che valgono le altre proprietà caratteristiche delle trasformazioni affini. Prenderemo il nostro quadrato quadrato, senza articolarlo adesso, e lo esporremo alla luce del sole; « leggeremo », sull'ombra, le varie proprietà. Si vedrà, anche, che, come caso particolare, si può avere l'uguaglianza.

Ma per rendere ancora più espressive le proprietà scoperte alla luce del sole è bene far osservare l'ombra del quadrato data dalla luce proveniente da una lampadina, da una sorgente puntiforme. Rimarranno addirittura sbalorditi: nessuno sospettava che lo spazio illuminato da una sorgente puntiforme fosse diverso dallo spazio illuminato dal sole. Qualche bambino dice: « nemmeno i grandi lo sanno; è perchè la gente non sa guardare! »

E ancora un altro argomento ci conduce a parlare di trasformazioni affini: i bambini sono abituati fin dalla prima classe a tracciare dei grafici per illustrare fenomeni empirici (quali le loro altezze, i loro pesi, la variazione del numero di abitanti in un

dato paese, ecc.), e sono anche abituati a rappresentare graficamente una legge matematica (come, ad esempio, la legge parabolica che lega i numeri ai loro quadrati). Sanno benissimo che le unità di misura sugli assi sono libere. Riprendiamo allora la legge dei numeri e dei loro quadrati nell'insieme dei relativi: ogni bambino ha disegnato la sua parabola, scegliendo a piacere delle unità di misura. Tante parabole, diverse come disegno ma che corrispondono alla stessa legge, la legge $y = x^2$. Due ragazzi confrontano i loro disegni: uno dice « guarda, la mia parabola sembra "allargata,, in confronto alla tua »; qualcuno dice « è come se una parabola fosse ottenuta dall'altra "stirandola,, in direzione dell'asse delle x ». « Ma allora — dice un altro compagno — è come se "la più stretta,, fosse disegnata su un pezzo di gomma e poi si tirasse ». Gli allievi avevano « visto » molto prima dell'insegnante!

Abbiamo disegnato delle figure, la parabola, un quadrato, un rettangolo, un cerchio, un esagono regolare, ecc. su una tela elastica; abbiamo effettuato uno stiramento della tela e le figure si sono trasformate. Si sono « lette » le proprietà invarianti: erano quelle caratteristiche dell'affinità. Ma questa esperienza sulla tela elastica ci ha fatto approfondire lo studio delle trasformazioni affini. Ripetiamola ancora e riflettiamo: se sulla tela abbiamo disegnato un sistema di assi ortogonali in modo che l'asse delle x abbia la direzione della trama estensibile, ad uno stiramento accadrà che l'ascissa di un punto $P(x, y)$ verrà alterata mentre l'ordinata rimarrà la stessa; e, a seconda della forza esercitata nello stiramento, l'ascissa raddoppierà, triplicherà, ecc. Si arriva del tutto spontaneamente alle equazioni di una particolare affinità

$$\begin{matrix} x' = mx \\ y' = y \end{matrix}$$
. Se poi immaginiamo di stirare la tela nella direzione dell'asse delle y , lasciando la x invariata, avremo equazioni del tipo $\begin{cases} x' = x \\ y' = ny \end{cases}$. E non è certo difficile arrivare ad equazioni più generali $\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$. Quelli m ed n , fattori d'ingrandimento, (anche pensati minori di 1), sono parlanti; accade ora che i ragazzi sanno « vedere » un'equazione, la fanno cioè immediatamente interpretare nel concreto. Vedono, per esempio, che se $m = n$ l'ingrandimento subito dalla figura sarà uguale in tutte le direzioni; la figura non cambia di forma: si ha una similitudine. La similitudine è dunque una particolare affinità.

È lo stesso ormai per loro una formula o un'esperienza: sanno vedere la formula come sanno vedere un'esperienza, un concreto.

Penso che da questi pochi cenni che si riferiscono a tante scuole di città e di campagna anche il lettore non abituato al dialogo coi piccoli possa convincersi come alla domanda « è possibile un'educazione al "saper vedere,, in matematica?» si debba rispondere con certezza in modo affermativo. Educare prima di tutto a guardare, ad osservare un concreto, e questo è il primo passo; è un passo che non è uguale per tutti perchè i bambini di ambiente operaio guardano meglio e con più fiducia dei loro compagni di ambiente borghese. Ma perchè venga attirata l'attenzione degli allievi occorre che il concreto consista in una situazione dinamica, costruttiva: è nel mutarlo che questo concreto, sia che si tratti di un dispositivo o di una qualunque questione matematica, mette in evidenza gli elementi che variano e quelli che sono invariati. Perchè variano? E come? I concetti di funzione, corrispondenza, trasformazione nascono in modo del tutto spontaneo, e una volta divenuti parte del linguaggio del bambino rafforzano le prime intuizioni. Trasformazioni, insiemi numerici, « cose » tanto diverse, eppure si scoprono spesso delle proprietà comuni che le uniscono strettamente: lo stesso modo di comportarsi, la stessa struttura. È questo « motivo » che riappare qua e là a proposito di oggetti diversi e di operazioni diverse che esercita sui bambini un fascino tutto particolare: i bambini sentono che in quel motivo che unisce campi così diversi e che spesse volte vincola astratto e concreto vi è qualcosa di molto profondo. Collegano, identificano, differenziano. Scelgono fra i tanti insiemi che hanno la stessa struttura quello che sembra loro più espressivo a rappresentare un dato modo di comportarsi: talvolta saranno delle trasformazioni geometriche, tal'altra i numeri pari e dispari, altre volte ancora una legge grammaticale. Il prototipo, scelto a rappresentare quella data struttura, potrà essere un concreto materializzabile o anche un astratto, che, per il solo fatto di essere utilizzato di frequente, diventa per loro più concreto di un materiale.

Ma è sempre un vedere semplice perchè la loro cultura è naturalmente molto limitata, è un cogliere fra le poche piccole cose che conoscono quella o quelle che si addicono ad una data situazione. È appunto la freschezza della loro mente che fa sì che vedono molto spesso più e meglio di noi insegnanti; ed è la consapevolezza di avere tutti la possibilità di arrivare ad una scoperta che li incoraggia e li entusiasma.

Qualcuno, in questa scienza in costruzione, vede di più, vede lontano: si stanno formando dei matematici. Ma non è questo che deve essere il nostro proposito nè deve costituire il nostro vanto. Noi insegnamo nella scuola media di tutti: il nostro proposito

deve essere quello — e non potrei esprimerlo meglio che con le parole di BRUNO DE FINETTI — « di far comprendere la matematica come qualcosa di vivo nel regno del pensiero. E farla comprendere significa anzitutto farla amare ».

*Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I.
l'11 ottobre 1967.*