BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROSA MARIA BIANCHINI

Due criteri di unicità e convergenza del metodo di Picard per equazioni differenziali ordinarie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 531–538.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_531_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Due criteri di unicità e convergenza del metodo di Picard per equazioni differenziali ordinarie.

di ROSA MARIA BIANCHINI (Firenze) (*)

Summary. - *Two criteria for the convergence of successive approximations (and for the uniqueness) of solutions of an ordinary differential equation are given, using the comparison method.*

I. – Il cosidetto metodo di confronto costituisce una delle tecniche più usate nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie, non solo per lo studio della stabilità delle soluzioni e delle loro proprietà asintotiche in genere, [1], ma anche per altre questioni quali quella dell'unicità [2]. Non sembra tuttavia che tale metodo sia stato usato finora con successo nel problema della convergenza delle iterate di PICARD e lo scopo di questa nota è appunto quello di provare due teoremi che portano un contributo a tale questione.

TEOREMA I.

Sia $\varphi(t, r)$ una funzione scalare, continua, non negativa, non decrescente rispetto ad r per ogni t fissato, definita per $t > 0$, $r \geq 0$ tale che $\varphi(t, 0) = 0$, ed inoltre in ogni sottinsieme $(0, \gamma)$ la funzione $r(t) \equiv 0$ sia la sola soluzione di

$$\dot{r}(t) = \varphi(t, r)$$

tale che $\lim\limits_{t \to 0+} r(t) = \lim\limits_{t \to 0+} r(t)/t = 0.$

Sia $V(t, x)$ una funzione scalare non negativa, definita per $|t| \leq a$, x n-vettore, localmente lipschitziana rispetto alla coppia t, x. Inoltre $V(t, x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Sia $f(t, x)$ un n-vettore continuo in un insieme R a $n+1$ dimensioni $|t| \leq a$, $|x| \leq b$, e sia in R verificata q.o. la seguente disuguaglianza:

$$(1.1) \qquad \dot{V}\left(t, \int_0^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\, ds\right) \leq \varphi\left(t, V(t, x(t) - y(t))\right)$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 11 del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R..

per tutte le funzioni a.c. $x(t)$, $y(t)$ *tali che* $(t, x(t))$, $(t, y(t)) \in R$

Sotto queste ipotesi l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \tag{E}$$

ha unicità a destra nel punto $(0, 0)$, *e la soluzione si può trovare con il metodo delle iterate di Picard.*

Dim. - Ammettiamo per assurdo che ci siano due soluzioni di (E), $x(t)$, $y(t)$ passanti per $(0,0)$. Per la (1.1) deve essere soddisfatta q.o. la seguente disuguaglianza

$$\dot{V}(t,\ x(t) - y(t)) \leq \varphi(t,\ x(t) - y(t));$$

dal teorema di unicità di F. Brauer e S. Sternberg [2] segue $x(t) = y(t)$.

La successione di Picard per il punto $(0, 0)$ è così definita.

$$\begin{cases} x_0(t) = 0 \\ x_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds \end{cases}$$

Condizione sufficiente affinchè converga ad una soluzione è che:

$$\lim_{n\to\infty} |\, x_{n+1} - x_n \,| = 0.$$

Poniamo $W_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$, le funzioni $W_n(t)$ sono equilimitate e equicontinue. Consideriamo la successione di funzioni $V(t,\ W_n(t))$; facciamo vedere che anche queste funzioni sono equicontinue ed equilimitate. Infatti

$$V(t,\ W_n(t)) = V(t,\ W_n(t)) - V(t,\ 0) \leq C \mid W_n(t) \mid$$

$$|\ V(t',\ W_n(t')) - V(t'',\ W_n(t''))\ | \leq C\,(\,|\ t' - t''\ | + |\ W_n(t') - W_n(t'')\ |\,).$$

Sia $v(t) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ V(t,\ V_n(t))$, $v(t)$ è una funzione continua perchè limite superiore di funzioni equicontinue ed equilimitate.

Dimostriamo che scelto $\delta > 0$, si può determinare un N_δ indipendente da s, tale che

$$V(s,\ W_n(s)) \leq v(s) + \delta \qquad \forall\, n > N\delta$$

Infatti essendo $v(t)$ uniformemente continua, $\forall\,\delta$ esiste un $\overline{N}_\delta$ tale che

$$|\ v(s) - v(s')\ | < \frac{\delta}{3} \qquad \text{se} \quad |\ s - s'\ | < \overline{N}_\delta$$

ed essendo le $V(s, V_n)$ equicontinue $\forall \delta$ esiste un $\overline{\overline{N}}_\delta$ tale che

$$| V(s, W_n(s)) - V(s', W_n(s')) | < \frac{\delta}{3} \quad \text{se} \quad | s - s' | < \overline{N}_\delta$$

Sia $\eta_\delta = \min (\overline{N}_\delta, \overline{\overline{N}}_\delta)$, divido l'intervallo in un numero finito di sottintervalli tali che $| s_i - s_{i+1} | < \eta_\delta$.

Per la definizione di massimo limite, $\forall s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ esiste un $N_{\delta i}$ tale che

$$V(s_i, V_n(s_i)) < v(s_i) + \frac{\delta}{3} \qquad \forall\, n > N_{\delta i}$$

Sia $N_\delta = \max N_{\delta i}$. Fissato un punto s dell'intervallo esiste un s_i tale che $| s - s_i | < \eta_\delta$

$$V(s, W_n(s)) \leq | V(s, W_n(s)) - V(s_i, W_n(s_i)) | + V(s_i, W_n(s_i)) \leq$$

$$\leq V(s_i, W_n(s_i)) + \frac{\delta}{3} \leq v(s_i) + 2\frac{\delta}{3} \leq v(s) + \delta \qquad \forall\, n > N_\delta$$

La lipschitzianità della V e l'assoluta continuità delle W_n permettono di affermare che

$$V(t + dt, W_n(t + dt)) - V(t, W_n(t)) = \int_t^{t+tdt} (dV(s, W_n(s))/ds) ds \leq$$

$$\leq \int_t^{t+dt} \varphi(s, V(s, W_{n-1}(s)))\, ds$$

per la supposta non decrescenza della φ rispetto alla seconda variabile si ha

$$\int_t^{t+dt} \varphi(s, V(s, W_{n-1}(s))ds \leq \int_t^{t+td} \varphi(s, V(s, v(s) + \delta)\, ds \qquad \forall\, n > N_\delta$$

$$V(t + dt, W_n(t + dt)) - V(t, W_n(t) \leq \int_t^{t+dt} \varphi(s, v(s) + \delta) ds \qquad \forall\, n > N_\delta$$

$$v(t + dt) - v(t) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, V(t + dt, W_n(t + dt)) - \overline{\lim_{n\leftarrow\infty}}\, V(t, W_n(t)) \leq$$

$$\lim_{n\to\infty} | V(t + dt, W_n(t + dt)) - V(t, W_n(t)) | \leq \int_t^{t+dt} \varphi(s, v(s) + \delta)\, ds$$

da cui facendo tendere δ a zero

$$v(t+dt)-v(t)\leq\int_t^{t+dt}\varphi(s,\ v(s))\ ds$$

quindi $v(t)$ è derivabile q.o. e

$$\dot{v}(t)\leq\varphi(t,\ v(t)) \tag{1.2}$$

Con lo stesso procedimento usato da E. A. CODDINGTON e N. LEVINSON [3] nel loro teorema analogo sulla convergenza del metodo di PICARD, si dimostra che da (1.2) segue che

$$0\leq v(t)\leq 0$$

da cui deriva

$$\lim_{n\to\infty} V(t,\ W_n(t)=0$$

Le $W_n(t)$ sono funzioni equicontinue ed equilimitate, quindi per il teorema di ASCOLI ARZELÀ ammettono sottosuccessioni convergenti uniformemente. Sia $W_{nk}(t)$ una di queste

$$0=\lim_{nk\to\infty} V(t,\ W_{nk}(t))=V(t,\ \lim_{nk\to\infty} W_{nk}(t))$$

e per l'ipotesi poste sulla V questo implica

$$\lim_{nk\to\infty} W_{nk}(t)=0$$

ma se qualunque sottosuccessione convergente di una successione limitata converge ad una stessa funzione, a questa funzione converge tutta la successione, cioè

$$\lim_{n\to\infty} W_n(t)=0$$

e quindi $\lim\limits_{n\to\infty} W_n(t)=0$.

OSS. - Questo teorema si può considerare come una generalizzazione del teorema di E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON [3], teorema che assicura l'unicità e la convergenza delle iterate di PICARD per il problema

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,\ x)\\ x(0)=0\end{cases}$$

se la f soddisfa alla condizione

$$| f(t, x) - f(t, y) | \leq \varphi(t, | x - y |)$$

Infatti nel teorema I scelta $V(t, x) = \sum_1^n{}_i \, | x_i |$ la (1.1) si scrive

$$\sum_1^n{}_i \operatorname{sgn}\left(\int_0^t [f_i(s, x(s)) - f_i(s, y(s))]ds \right) \times [f_i(t, x) - f_i(t, y)] \leq$$

$$\sum_1^n{}_i \; | f_i(t, x) - f_i(t, y) | = | f(t, x) - f(t, y) |$$

2. - Il secondo teorema si può enunciare così;

TEOREMA II.

Sia $\psi(t, r)$ *una funzione scalare continua, monotona crescente rispetto ad* r *per ogni* t *fissato, definita per* $-a \leq t \leq a$, $-2b \leq r \leq 2b$ *tale che la soluzione superiore a destra di*

$$\dot{r}(t) = \psi(t, r), \qquad r(0) = 0$$

sia la soluzione identicamente nulla.

Sia $V(t, x)$ *una funzione scalare non negativa, localmente lipschitziana rispetto alla coppia di variabili* t, x; *definita per* $|t| \leq a$, x n*-vettore tale che* $V(t, x) = 0$ *implichi* $x = 0$.

Sia $f(t, x)$ *un* n*-vettore continuo definito in* R: $| t | \leq a \; | x | \leq b$ *tale che in* R *verifichi la seguente disuguaglianza*:

$$V\left(t, \int_0^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]ds\right) \leq \int_0^t \psi(s, V(s, x(s) - y(s))ds \tag{2.1}$$

per ogni coppia di funzioni assolutamente continue $x(t)$, $y(t)$ *tali che* $(t, x(t))$, $(t, y(t))$ *appartengono ad* R.

Sotto queste ipotesi l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \tag{E}$$

ha unicità a destra per il punto $(0, 0)$ *e la soluzione si può trovare con il metodo delle iterate di Picard.*

DIM. - Ammettiamo per assurdo che esistano due soluzioni di (E); $x(t)$ e $y(t)$ tali che $x(0) = y(0) = 0$.

Poniamo:

$$v(t) = V(t, x(t) - y(t))$$

per la (2.1)

$$v(t) \leq \int_0^t \psi(s, v(s)) ds$$

per il teorema di B. VISWANATHAM [4] (1)

$$0 \leq v(t) \leq 0$$

e quindi (E) ha unicità a destra nel punto (0, 0).

La successione di PICARD per il punto (0, 0) è così definita:

$$\begin{cases} x_0(t) = 0 \\ x_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, x_n(s)) ds \end{cases}$$

in ipotesi di unicità, condizione necessaria e sufficiente affinchè converga ad una soluzione è che:

$$\lim_{n\to\infty} | x_{n+1} - x_n | = 0$$

Poniamo $W_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ e

$$v(t) = \overline{\lim_{n\to\infty}} V(t, W_n(t))$$

le $W_n'(t)$ sono funzioni equicontinue ed equilimitate (vedi dimostrazione analoga nel teorema I) e quindi $v(t)$ è una funzione continua.

Scelto $\delta > 0$ si può determinare un N_δ indipendente da s tale che

$$V(s, W_n(s)) \leq v(s) + \delta \qquad \forall n > N_\delta$$

(vedi dimostrazione nel teorema I)

---

(1) Teorema di B. Viswanatham - Se $\Phi(x) \leq \eta + \int_{x_0}^{x} f(s, \Phi(s)) ds$ con $f(x, y)$ funzione continua monotona crescente in y per x fissato in una regione R: $|x - x_0| \leq a$ $|y - y_0| \leq b$, a e b numeri reali positivi, $\Phi(x)$ funzione continua nell'intervallo $|x - x_0| \leq a$, allora $\Phi(x) \leq X(x)$ essendo $X(x)$ la soluzione superiore dell'equazione differenziale $\dot{z} = f(x, z)$ passante per (x_0, η).

$$V(t, W_n(t)) = V(t, \int_0^t [f(s, x_n(s)) - f(s, x_{n-1}(s))] ds \leq$$

$$\leq \int_0^t \psi(s, W_{n-1}(s)) ds$$

quindi per la supposta monotonia della ψ, si ha

$$V(t, W_n(t)) \leq \int_0^t \psi(s, v(s) + \delta) ds \qquad \forall n > N_\delta$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} V(t, W_n(t)) \leq \int_0^t \psi(s, v(s) + \delta) ds$$

e facendo tendere δ a zero

$$v(t) \leq \int_0^t \psi(s, v(s)) ds$$

per il teorema di B. Viswanatham [4], si ha allora

$$0 \leq v(t) \leq 0$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} V(t, W_n(t)) = 0 .$$

Le $W_n(t)$ sono funzioni equicontinue ed equilimitate, quindi per il teorema di Ascoli Arzelà ammettono sottosuccessioni uniformemente convergenti. Sia $W_{nk}(t)$ una di queste

$$0 = \lim_{nk\to\infty} V(t, W_{nk}(t)) = V(t, \lim_{nk\to\infty} W_{nk}(t))$$

e per l'ipotesi poste sulla V questo implica

$$\lim_{nk\to\infty} W_{nk}(t) = 0$$

ma allora $\lim_{n\to\infty} | W_n(t) |$ esiste ed è uguale a zero.

BIBLIOGRAFIA

(1) F. Brauer, *The use of comparison theorems for ordinary differential equations*, Proceed. of NATO Advanced Study Institute, Padua 1965, pag. 29-50 (Gubbio 1966).

(2) F. Brauer - S. Sternberg, *Local uniqueness, existence in the large and the convergence of successive approximations*, « Am. Jour. Math. », 80 (1958), pag. 421-430.

(3) E. A. Coddington - N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill Book Co. New York (1955), pag. 54-58.

(4) B. Viswanatham, *A generalisation of Bellman's lemma*, « Proc. Am. Math. Soc. », 14 (1963), pag. 15-18.

---

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
il 24 ottobre 1967