Bollettino Unione Matematica Italiana

Piero Bonera

Un teorema sui sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente e alcune sue applicazioni. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 527–530.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_527_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Un teorema sui sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente e alcune sue applicazioni.

PIERO BONERA (Bologna) (*)

NOTA II

Sunto. - *In questa Nota viene presentata la seconda applicazione del teorema del num.* 1 *e precisamente vengono dimostrate alcune proprietà caratteristiche delle superficie razionali normali dello spazio* S_5.

6. - Si consideri la rigata razionale normale generale dello spazio S_5, che, notoriamente (9), è rappresentabile sul piano mediante il sistema (lineare) delle cubiche per un punto A doppio e un punto B semplice.

Allora la serie lineare (di curve), che la totalità delle quadriche dell'S_5 ambiente traccia sulla rigata, ha come imagine sul piano rappresentativo il sistema (lineare completo ∞^{14}) delle sestiche aventi punto quadruplo in A e doppio in B.

In conseguenza, le quadriche dell'S_5, che contengono la rigata, formano un sistema lineare ∞^5.

Siccome (10), d'altra parte, la rigata considerata ha un unico punto doppio apparente, segue che il sistema precedente è composto con una congruenza lineare di S_1 e perciò (num. 1) che esso ha la matrice jacobiana nulla identicamente e di caratteristica cinque.

OSSERVAZIONE. - La precedente conclusione si può confermare algebricamente senza difficoltà.

7. - La conclusione del num. prec. acquista un particolare interesse, potendosi dimostrare che:

La rigata razionale normale generale dell' S_5 *è l'unica superficie razionale normale dell'* S_r, *con* $r > 4$, *che ammetta una rap-*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca N. 26 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.; seguito di una nota dallo stesso titolo pubblicata nel B. U. M. I., vol. XXII, pag. 183.

(9) P. BONERA, a) *Sui punti doppi impropri delle superficie razionali nello spazio a quattro dimensioni*, Rend. R. Ist. Lomb., 72 (1938);

b) *Sulle superficie razionali di* S_4 *con uno o due punti doppi impropri*, Ibidem, 73 (1939-40). Cfr. b) num. 2.

(10) Cfr. (9), b), num. 2.

presentazione piana d'ordine minimo, priva di punti base infinitamente vicini e del resto generica, e che sia la base d'un sistema lineare di quadriche avente la dimensione non minore di quella dello spazio ambiente e la matrice jacobiana nulla identicamente.

È noto che ogni superficie razionale appartenente ad uno spazio S_r è rappresentabile sul piano in modo, che le imagini delle sezioni iperpiane siano curve algebriche di uno stesso sistema lineare ∞^r e che, inversamente, ogni sistema lineare ∞^r di curve piane algebriche (purchè *semplice*, cioè non composto né con una involuzione, né con un fascio) è suscettibile di tale interpretazione.

Se la superficie è normale (in S_r), il sistema rappresentativo è completo; ed inversamente.

Tale sistema si sottoporrà alle seguenti restrizioni:

I. - Il sistema (completo) sia regolare (cioè non sovrabbondante);

II. - Applicando al sistema (completo) la riduzione all'ordine minimo mediante trasformazioni Cremoniane si ottenga un sistema privo di punti base infinitamente vicini (cioè tale, che in ciascun punto base s — plo le s tangenti sian tutte variabili);

III. - Per il sistema ridotto all'ordine minimo la posizione dei punti base sia generica (cioè tale, che, assunto comunque un gruppo di t punti base, questi non appartengano ad una curva d'ordine ν, con $\frac{\nu(\nu+3)}{2} < t$).

Una superficie rappresentata da un siffatto sistema si dirà brevemente una superficie Σ.

Inoltre si dirà Σ' la proiezione di Σ da un S_{r-5} generico sopra un S_4.

Allora la superficie (razionale) Σ' avrà come imagine, sul piano rappresentativo, un sistema lineare ∞^4 genericamente subordinato del sistema completo ultimamente considerato e pertanto ([11]) essa possiederà un numero finito $d \geq 0$ di punti doppi impropri (nel senso del SEVERI).

Ora suppongasi (se è possibile) che la superficie Σ sia la base d'un sistema lineare di quadriche avente la dimensione non minore di quella dello spazio ambiente e la matrice jacobiana nulla identicamente.

In tale ipotesi, per il teorema del num. 1, il sistema suddetto sarà composto con una congruenza lineare di S_k, ove è $k \geq 1$, cosicchè da un punto generico dell'S_{r-5} uscirà almeno una corda della superficie Σ.

([11]) Cfr. ([9]), a).

Siccome [12], però, i punti doppi apparenti di Σ son tanti, quanti i punti doppi impropri di Σ', si dedurrà, secondo precede, che è:

$$r = 5, \ d = 1.$$

Siccome [12], d'altra parte, i tipi di superficie Σ dello spazio S_5, che abbiano un unico punto doppio apparente, sono soltanto la rigata razionale normale generale, considerata nel num. 6, e la superficie normale, rappresentata sul piano dal sistema (lineare) delle cubiche per quattro punti distinti, e a tre a tre non allineati, si deduce subito l'asserto [13].

Osservazione. - Recando ancora l'attenzione sul sistema (ridotto all'ordine minimo) rappresentativo della rigata razionale normale generale di S_5 (num. 6), si consideri il sistema, birazionalmente distinto, ottenuto da quello precedente supponendo che B divenga infinitamente vicino ad A.

Allora la rigata razionale normale di S_5, che rappresenta il sistema così ottenuto, sarà proiettivamente distinta dalla rigata summenzionata e possiederà, a differenza di questa, una direttrice rettilinea, imagine dell'intorno di A.

8. - Giova per il seguito rilevare che:

Una superficie algebrica irriducibile, F, che appartenga allo spazio S_5 e che sia la base d'un sistema lineare, S, di quadriche avente la dimensione non minore di quella dello spazio ambiente, è necessariamente una delle seguenti:

I. - *Superficie di* Veronese;

II. - *Rigata razionale normale generale*;

III. - *Rigata razionale normale con direttrice rettilinea*;

IV. - *Cono razionale del quart'ordine.*

Si osservi, anzitutto, che un S_3 *generico* dell'S_5 non giace in alcuna quadrica di S.

Ed invero, tale S_3, se, al contrario, giacesse in (almeno) una quadrica, Q, di S, sarebbe doppio per la quadrica stessa, sia perchè F, essendo irriducibile ed appartenendo all'S_5, dev'essere di or-

[12] Cfr. [11], b), num. 2.

[13] Infatti, riguardo alla prima superficie si ricordi una deduzione alla fine del n. 6 e riguardo alla seconda si osservi che il sistema (lineare) delle quadriche, che la sostengono, è ∞^4.

dine $n > 3$, sia perchè Q, contenendo F, avrebbe punto doppio in ciascuno degli n punti comuni all'S_3 ed a F (14).

In conseguenza, Q sarebbe riducibile e quindi F, essendo irriducibile, giacerebbe in un S_4, contro l'ipotesi.

Ora si osservi che deve esser $n < 5$.

Ed invero, per l'osservazione fatta sopra, il sistema S traccia sull'S_3 considerato un sistema (lineare) della stessa dimensione e perciò di dimensione non minore di cinque; ma, d'altra parte, le quadriche dell'S_3 predetto, che contengono gli n punti summenzionati, qualora fosse $n \geq 5$, formerebbero un sistema (lineare) di dimensione minore di cinque, contro la prec. deduzione.

Si conclude, dunque, che dev'essere $n = 4$.

Perciò la superficie F è razionale normale e quindi (15) essa è necessariamente una delle superficie indicate nei tipi I, II, III, IV.

Se, peraltro, si osserva che, essendo la superficie di VERONESE (tipo I) priva di punti doppi apparenti, il relativo sistema S, che è ∞^5, è, per il teorema del num. 1, a matrice jacobiana *non* nulla identicamente e che, invece, il sistema S, relativo al cono razionale del quart'ordine (tipo IV), avendo punto base doppio nel vertice e la dimensione cinque, ha, per il teorema cit., la matrice jacobiana nulla identicamente, dal prec. risultato deducesi (num. 6; num. 7, Oss.) che:

La rigata razionale normale generale, la rigata razionale normale con direttrice rettilinea e il cono razionale del quart'ordine sono le sole superficie algebriche irriducibili, che appartengano allo spazio S_5 e che siano la base d'un sistema lineare di quadriche avente la dimensione non minore di quella dello spazio ambiente e la matrice jacobiana nulla identicamente (16).

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 24 ottobre 1967.

(14) Per l'irriducibilità della superficie F e per l'appartenenza di questa allo spazio S_5, gli n punti suddetti son distinti e non tutti complanari.

(15) DELLO PEZZO, *Sulle superficie di ordine n nello spazio di n+1 dimensioni* (Rend. Accad. di Napoli 1885) e *Sulle proiezioni di una superficie e di una varietà...* (Ivi, 1886).

(16) Viene così sciolta la riserva che trovasi nella Nota cit. in (2) (ivi, num. 2).