Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Figà-Talamanca

# Un'osservazione sulle serie di Fourier lacunari per gruppi non commutativi.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **22** (1967), n.4, p. 497–504.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_497_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

# Un'osservazione sulle serie di Fourier lacunari per gruppi non commutativi.

di Alessandro Figà-Talamanca (*)

**Summary.** - *Helgason has proved that if $f \in L^1(G)$ ($G$ a compact group) is a central function whose Fourier series satisfies a certain lacunarity condition then $f \in L^4(G)$. We show that the lacunarity condition given by Helgason is not sufficient to insure that the same property hold for non-central functions and we modify Helgason's condition so as to make the result true for not necessarily central functions.*

**1.** Sia $G$ un gruppo compatto e $\Gamma$ l'insieme delle classi di equivalenza di rappresentazioni unitarie irriducibili di $G$. Scriveremo la serie di Fourier di una funzione $f \in L^1(G)$ come

$$f(x) \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} d_\gamma Tr(A_\gamma D_\gamma(x)),$$

dove $Tr$ è la traccia ordinaria, $D_\gamma$ un membro rappresentativo della classe $\gamma \in \Gamma$, $d_\gamma$ il grado di $\gamma$ e infine $A_\gamma$ è la trasformazione lineare (sullo spazio di Hilbert di dimensione $d_\gamma$) definita da

$$A_\gamma = \int_G f(x) D_\gamma(x^{-1}) dx,$$

($dx$ indica l'integrazione rispetto alla misura di Haar su $G$).

Secondo la definizione data in [2, p. 511] e in [1], un sottoinsieme $E$ di $\Gamma$ si chiama *insieme lacunare di ordine p* ($p > 1$), quando ogni funzione $f \in L^1(G)$, con serie di Fourier $f(x) \sim \sum_{\gamma \in E} d_\gamma Tr(A_\gamma D_\gamma(x))$, appartiene a $L^p$ (cfr. anche [4]). D'altra parte S. Helgason [3] definisce un sottoinsieme $E$ di $\Gamma$ « lacunare » quando soddisfa ad una certa condizione di natura algebrica [3, Definizione 4.1] che è riportata appresso e che noi chiameremo *condizione di Helgason* o (*HC*).

Egli poi dimostra [3, Teorema 5] che se $E$ soddisfa (*HC*) e $f \in L^1(G)$ è una funzione *centrale* con serie di Fourier $f(x) \sim \sum_{\gamma \in E} d_\gamma Tr(A_\gamma D_\gamma(x))$, allora $f \in L^4(G)$. Cioè in sostanza Helgason dimostra che un insieme che soddisfa (*HC*) si comporta, per le sole funzioni centrali, come un insieme lacunare d'ordine quattro.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 23 del C.N.R. (comitato per la matematica).

In particolare $(HC)$ è sufficiente ad assicurare che $E$ sia un insieme lacunare di ordine quattro quando $G$ è un gruppo compatto commutativo.

In questa nota mostreremo con un esempio che un insieme che soddisfa $(HC)$ può non essere in generale un insieme lacunare di ordine quattro. L'esempio è basato su una modificazione dell'esempio dato in [1, n. 3]. Successivamente dimostriamo nel n. 3 che un'opportuna modificazione di $(HC)$ dà luogo ad una condizione che assicura che un insieme $E \subseteq \Gamma$, sia un insieme lacunare di ordine quattro. È opportuno notare a questo punto che, a quel che sembra, non esistono, per alcun gruppo compatto (commutativo o no) esempi noti di insiemi lacunari di ordine $p > 1$ che non siano insiemi lacunari almeno di ordine quattro [4, p. 206].

A questo proposito si osservi che se $1 < p < r$ la classe dei sottoinsiemi di $\Gamma$ che sono insiemi lacunari di ordine $r$ è contenuta nella classe degli insiemi lacunari di ordine $p$, questo fatto è dimostrato ad es. in [4] per il gruppo del cerchio, la stessa dimostrazione vale per qualsiasi gruppo compatto. Useremo anche una semplice conseguenza della disuguaglianza di HÖLDER che ci permette di concludere che $E$ è un insieme lacunare di ordine $p$ quando esiste un $r < p$ tale che ogni funzione $f \in L^r$ con serie di FOURIER $f \sim \sum_{\gamma \in E} d_\gamma Tr(A_\gamma D_\gamma(x))$ appartiene a $L^p$ [4, 1.4].

2. Diremo che un insieme $E \subseteq \Gamma$ soddisfa alla condizione di HELGASON, o che soddisfa a $(HC)$ se esso ha le seguenti proprietà:

(I) *se* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in E$, *allora nessuna componente irriducibile di* $D_{\gamma_1} \otimes D_{\gamma_2}$ *può essere equivalente a una componente irriducibile di* $D_{\gamma_3} \otimes D_{\gamma_4}$, *a meno che non si abbia* $\gamma_1 = \gamma_3$ *e* $\gamma_2 = \gamma_4$ *oppure* $\gamma_1 = \gamma_4$ *e* $\gamma_2 = \gamma_3$.

(II) *esiste una costante* $K$ *tale che per ogni* $\gamma_1, \gamma_2 \in E$, *il numero delle componenti irriducibili di* $D_{\gamma_1} \otimes D_{\gamma_2}$ *è limitato da* $K$.

Sia ora, per ogni intero positivo $n$, $G_n$ il gruppo delle matrici unitarie $n \times n$ ottenute permutando le righe di una matrice diagonale complessa con elementi di modulo uno sulla diagonale principale, cioè se $V \in G_n$, $V = (v_{ij})$, allora $v_{ij} = 0$ eccetto per $|v_{ij_i}| = 1$, $i = 1, \ldots, n$ dove $(j_1, \ldots, j_n)$ è una permutazione dei primi $n$ interi positivi. Osserviamo che $G_n$ è un gruppo compatto e che la rappresentazione identica di $G_n$ su se stesso è una rappresentazione irriducibile. Notiamo ancora che se $H_n$ è il sottogruppo di $G_n$ consistente delle matrici diagonali di $G_n$, allora $H_n$ è aperto e chiuso e ha indice $n!$ rispetto a $G_n$. Si ha poi che $H_n$ è un sottogruppo normale e che i sistemi laterali di $H_n$ hanno tutti misura di HAAR uguale alla misura di $H_n$, pertanto essi costituiscono una famiglia di $n!$ insiemi aperti disgiunti tutti di misura $\frac{1}{n!}$ (supponendo, come al solito, che la misura di HAAR di $G_n$ sia normalizzata in modo tale che la misura di $G_n$ sia uno). Consideriamo ora il gruppo $G = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$. Si ha allora che $G$ è un gruppo compatto e le proiezioni naturali $D_n : G \to G_n$ sono rappresentazioni irriducibili di $G$, aventi grado $n$. Siccome per $n \neq m$ $D_n$ e $D_m$ non sono equivalenti, ogni $D_n$ è contenuto in una sola classe di equivalenza di rappresentazioni irriducibili. Cioè $D_n$ è un elemento della classe $\gamma_n \in \Gamma$. Possiamo allora identificare l'insieme $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ con un sottoinsieme $E = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ di $\Gamma$. Dimostriamo che:

TEOREMA 1. – *L'insieme* $\{\gamma_n\} = E \subseteq \Gamma$ *soddisfa alla condizione di Helgason* $(HC)$ *ma non è un insieme lacunare di ordine quattro.*

DIMOSTRAZIONE. – Dimostriamo che $E$ soddisfa a $(HC)$. Il numero delle componenti irriducibili comuni a $D_h \otimes D_k$ e $D_n \otimes D_m$ è

$$\int_G Tr(D_h \otimes D_k(V))\overline{Tr(D_n \otimes D_m(V))}dV =$$

$$= \int_G Tr(D_h(V))Tr(D_k(V))\overline{Tr(D_n(V))}\,\overline{Tr(D_m(V))}dV,$$

dove $dV$ è la misura di HAAR su $G$. Se uno degli indici $h$, $k$, $n$, $m$ è diverso da tutti gli altri, diciamo $h \neq k$, $m$, $n$, allora l'integrale a secondo membro è

$$\int_{G_h} Tr(D_h(V))V_h \cdot \int_G Tr(D_k(V))\overline{Tr(D_n(V))}\,\overline{Tr(D_m(V))}dV,$$

dove $dV_h$ è la misura di HAAR su $G_h$.

Questa espressione è zero perchè il primo fattore è zero. Ne segue che se $D_h \otimes D_k$ e $D_n \otimes D_m$ hanno componenti irriducibili a comune deve essere $h = k$ e $n = m$, oppure $h = n$ e $k = m$, oppure ancora $h = m$ e $k = n$.

Per ottenere che $E$ soddisfi (I) di $(HC)$ basterà far vedere che se $h = k$ e $n = m$, $D_k \otimes D_k$ e $D_n \otimes D_n$ non hanno componenti comuni a meno che $h = n$.

Infatti se $h \neq n$, il numero delle componenti comuni è

$$\int_G Tr(D_h \otimes D_h(V))\overline{Tr(D_n \otimes D_n(V))}dV =$$
$$= \int_{G_h} Tr(D_h(V))^2 dV_h \cdot \int_{G_n} \overline{Tr(D_n(V))^2} dV_n .$$

Dimostriamo che il secondo membro è zero facendo vedere che sono zero ambedue i fattori. Infatti, ad esempio

$$\int_{G_h} Tr(D_h(V))^2 dV_h = \sum_{i,j} \int_{G_h} v_{ii}^2 v_{jj}^2 dV_h ,$$

dove $(v_{ij}) = D_h(V_h) = V_h$. Dimostriamo che

$$\int_{G_h} v_{ii}^2 v_{jj}^2 dV_h = 0, \tag{1}$$

infatti sia $W = (w_{ij})$ una matrice diagonale appartenente a $G_h$, cioè $|w_{ii}| = 1$, $w_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Per l'invarianza della misura di Haar su $G_h$ si ha:

$$\int_{G_h} v_{ii}^2 v_{jj}^2 dV_h = \int_{G_h} v_{ii}^2 w_{ii}^2 v_{jj}^2 w_{jj}^2 dV_h = w_{ii}^2 w_{jj}^2 \int_{G_h} v_{ii}^2 v_{jj}^2 dV_h .$$

Siccome $w_{ii}$ e $w_{jj}$ sono numeri arbitrari di modulo uno, possiamo sceglierli in modo tale che $w_{ii}^2 w_{jj}^2 = -1$. Ne segue che deve valere la (1).

Per dimostrare che $E$ soddisfa a (II) notiamo che il numero delle componenti irriducibili di $D_n \otimes D_m$ è dato da

$$\int_G |Tr(D_n \otimes D_m(V))|^2 dV = \int_G |Tr(D_n(V))|^2 |Tr(D_m(V))|^2 dV. \tag{2}$$

Ora, se $n \neq m$ il secondo membro è

$$\int_{G_n} |Tr(D_n(V))|^2 dV_n \cdot \int_{G_m} |Tr(D_m(V))|^2 dV_m = 1,$$

perchè i due fattori sono uno dal momento che le rappresentazioni $D_n$ e $D_m$ sono ambedue irriducibili. Se $n = m$, allora l'integrale a primo membro di (2) è

$$\int_{G_n} Tr(D_n(V))^4 dV_n = \sum_{i,j,h,k} \int_{G_n} v_{ii}\bar{v}_{jj}v_{hh}\bar{v}_{kk} dV_n .$$

Sia $W$ una matrice diagonale arbitraria $W = (w_{ij}) \in G_n$. Allora, per l'invarianza di $dV_n$

$$\int_{G_n} v_{ii}\bar{v}_{jj}v_{hh}\bar{v}_{kk} dV_n = w_{ii}\bar{w}_{jj}w_{hh}\bar{w}_{kk} \int_{G_n} v_{ii}\bar{v}_{jj}v_{hh}\bar{v}_{kk} dV_n ,$$

dall'arbitrarietà di $W$ segue che (4) è diverso da zero solo se $i = j$ e $h = k$, oppure $i = h$ e $j = k$. Perciò la somma a secondo membro di (3) diventa

$$\sum_1^n \int_{G_n} |v_{ii}|^4 dV_n + 2 \sum_{i \neq j} \int_{G_n} |v_{ii}|^2 |v_{jj}|^2 dV_n . \tag{5}$$

I termini della prima somma sono $n$, quelli della seconda somma $n(n-1)$.

$$\int_{G_n} |v_{ii}|^4 dV_n = \sum_{j=1}^{n!} \int_{H_{nj}} |v_{ii}|^4 dV_n ,$$

dove gli $H_{nj}$ sono, per $j = 1, \ldots, n!$, i sistemi laterali rispetto al sottogruppo aperto e chiuso $H_n \subseteq G_n$. Ognuno degli $H_{nj}$ contiene una e una sola matrice di permutazione (ottenuta permutando le righe della matrice identità). Sia $\pi_j$, $j = 1, \ldots, n!$, la permutazione dei primi $n$ interi positivi che applicata alle righe della matrice identità $n \times n$ da luogo ad un elemento di $H_{nj}$. Allora

$$\int_{H_{nj}} |v_{ii}|^4 dV_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } \pi_j \text{ lascia fisso } i \\[2ex] 0 & \text{se } \pi_j \text{ non lascia fisso } i. \end{cases}$$

Si osservi infatti che la misura di $H_{nj}$ è $1/n!$ e che $|v_{ii}|^4$ non può che assumere i valori zero o uno ed è costante su ciascuno degli $H_{nj}$ avendo valore uno $H_{nj}$ se e solo se $\pi_j$ lascia fisso $i$. Siccome le permutazioni che lasciano fisso $i$ sono $(n-1)!$, si ha:

$$\int_{G_n} |v_{ii}|^4 dV_n = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} . \tag{6}$$

Ne segue che la prima somma di (5) è uguale a uno. Per la seconda somma scriviamo

$$\int_{G_n} |v_{ii}|^2 |v_{jj}|^2 d V_n = \sum_{s=1}^{n!} \int_{H_{ns}} |v_{ii}|^2 |v_{jj}|^2 d V_n = \tag{7}$$

$$= \frac{1}{n!}(n-2)! = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Infatti gli integrali a secondo membro di (7) sono $\frac{1}{n!}$ o zero a seconda che la permutazione $\pi_s$ lasci fissi o no i due indici $i$ e $j$. Le permutazioni di $n$ elementi che ne lasciano fissi due sono $(n-2)!$.

Abbiamo allora che l'espressione (5) e quindi il primo membro di (3) è uguale a $\frac{1}{n} + 2n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 3$. Ne segue che il numero delle componenti irriducibili di $D_n \otimes D_m$ è tre. Perciò il numero delle componenti irriducibili di $D_n \otimes D_m$ è sempre minore o tutt'al più uguale a tre. Quindi $E$ soddisfa alle ipotesi (I) e (II) e soddisfa $(HC)$. Dimostriamo ora che $E$ non è un insieme lacunare di ordine quattro. Per questo, analogamente a quanto si è fatto in [1, Lemma 3.1], basterà dimostrare che la relazione

$$\int_{G_n} | Tr(A_n D_n(V))|^4 \, d V_n \leq \frac{B}{n^2} \cdot Tr(A_n A_n^*)^2, \tag{8}$$

non può sussistere con $B$ indipendente da $n$, per tutti gli $n$ e tutte le matrici $A_n$ a $n$ righe e $n$ colonne. Ma per far vedere che (8) non sussiste basterà prendere per $A_n$ la matrice che è zero ovunque eccetto che per l'elemento $a_{11} = 1$. Allora per la (6) il primo membro di (8) è uguale a $\frac{1}{n}$. Il teorema è dimostrato.

Osserviamo, come conseguenza del Teorema 5 di [3] (in realtà come conseguenza della dimostrazione del Teorema 5) che se $f \in L^1(G)$, $f \sim \Sigma a_n n Tr(D_n(V))$ (il che implica che $f$ è centrale), allora $f \in L^4(G)$; e che d'altra parte esiste $f \in L^1(G)$, $f \sim \Sigma n Tr(A_n D_n(V))$ tale che $f \notin L^4(G)$. In effetti l'insieme $E$ gode anche della proprietà che se $f \in L^1(G)$, e $f \sim \Sigma n a_n Tr(D_n(V))$, allora $f \in \bigcap_{p<\infty} L^p(G)$. Questo risultato può essere ottenuto con le tecniche di [2, Teorema 6 e Corollario 9] a partire dalla osservazione che se $f$ è una funzione continua e centrale $f \sim \Sigma n a_n Tr(D_n(V))$, allora $\Sigma n^2 |a_n| < \infty$ (cioè $f$ ha serie di FOURIER assolutamente convergente).

**3.** Sia ora $G$ un gruppo compatto arbitrario. Vogliamo dare una condizione sufficiente perchè un insieme $E \subseteq \Gamma$ sia un insieme lacunare di ordine quattro.

TEOREMA 2. – *Se* $E \subseteq \Gamma$ *soddisfa alla ipotesi* (I) *di* $(HC)$ *e inoltre per ogni* $\gamma \in E$ *e ogni matrice* $A_\gamma$ *con* $d_\gamma$ *righe e* $d_\gamma$ *colonne,*

$$\int_G |\, Tr(A_\gamma D_\gamma(x))|^4\, dx \leq \frac{B}{d_\gamma^2}\, Tr(A_\gamma A_\gamma^*)^2 \tag{9}$$

*dove* $B$ *è una costante e* $d_\gamma$ *il grado della rappresentazione* $D_\gamma$, *allora* $E$ *è un insieme lacunare di ordine quattro.*

DIMOSTRAZIONE. – Dobbiamo far vedere che se $f(x) = \sum_{i=1}^{N} d_i Tr(A_i D_i(x))$, con $D_i$ rappresentazioni (distinte non equivalenti) di $E$, allora $\|f\|_4 \leq C\|f\|_2$. Infatti

$$\int_G |f(x)|^4\, dx = \tag{10}$$

$$= \Sigma \int_G d_i Tr(A_i D_i(x)) d_j \overline{Tr(A_j D_j(x))} d_h Tr(A_h D_h(x)) d_k \overline{Tr(A_k D_k(x))} dx,$$

dove la somma è estesa a tutti i possibili $i$, $j$, $h$, $k$ tali che $1 \leq i$, $j$, $h$, $k \leq N$. Per la condizione (I) di $(HC)$ le funzioni $Tr(A_i D_i(x)) \cdot Tr(A_k D_h(x))$ e $Tr(A_j D_j(x)) \cdot Tr(A_k D_k(x))$ sono ortogonali a meno che $i = j$ e $h = k$ oppure $i = k$ e $h = j$. Ne segue che gli unici termini della somma che non si annullano sono della forma

$$\Sigma \int_G d_i^2 |\, Tr(A_i D_i(x))|^2\, d_h^2 |\, Tr(A_h D_h(x))|^2\, dx. \tag{11}$$

Ma per la disuguaglianza di HÖLDER, (10) è maggiorata da

$$d_i^2 d_h^2 \left\{ \int_G |\, Tr(A_i D_i(x))|^4\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_G |\, Tr(A_h D_h(x))|^4\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

che per l'ipotesi del teorema è maggiorato da

$$B d_i^2 d_h^2\, \frac{Tr(A_i A_i^*)}{d_i}\, \frac{Tr(A_h A_h^*)}{d_h}.$$

Perciò il primo membro di (10) è maggiorato da

$$B \sum_{i,h=1}^{N} d_i d_h Tr(A_i A_i^*) Tr(A_h A_h^*) \leq B[\sum_{i=1}^{N} d_i Tr(A_i A_i^*)]^2 =$$

$$= B \left\{ \int_G |f(x)|^2 dx \right\}^2,$$

(l'ultima uguaglianza sussiste per la formula di PETER-WEYL). Pertanto

$$\left\{ \int_G |f(x)|^4 dx \right\}^{\frac{1}{4}} \leq B^{\frac{1}{4}} \left\{ \int_G |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

che è quello che si voleva dimostrare.

## BIBLIOGRAFIA

[1] A. FIGÀ-TALAMANCA, *Appartenenza a $L^p$ delle serie di Fourier aleatorie su gruppi non commutativi*, « Rend. Sem. Mat. Padova », in corso di stampa.

[2] A. FIGÀ-TALAMANCA e D. RIDER, *A theorem of Littlewood and lacunary series for compact groups*, « Pacific Journ. of Math. », 16, (1966), 505-513.

[3] S. HELGASON, *Lacunary Fourier series on noncommutative groups*, « Proc. Am. Math. Soc. », 9 (1958), 782-790.

[4] W. RUDIN, *Trigonometric series with gaps*, « J. Math. and Mech. », 9 (1960), 203-227.

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
*il 10 ottobre 1967*