Bollettino Unione Matematica Italiana

Angelo Cavallucci

Costruzione di un rilevamento per la traccia iperpiana dello spazio $H_\mu(R^n)$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 491–496.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_491_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Costruzione di un rilevamento per la traccia iperpiana dello spazio $H_\mu(R^n)$.

ANGELO CAVALLUCCI (Bologna) (*)

Sunto. - *In un precedente lavoro si è costruito un rilevamento per la traccia iperpiana di una classe di spazi H_μ contenente gli spazi più comunemente utilizzati. Contemporaneamente Itano ha caratterizzato la classe di tutti gli spazi H_μ che ammettono un rilevamento. Qui si da una costruzione esplicita di un rilevamento continuo valida per per tutti gli spazi di tale classe.*

Sia R^n lo spazio euclideo reale n-dimensionale ($n \geq 2$) delle n-ple di numeri reali $x = (x_1, \dots, x_n)$. Scriveremo anche $x = (x', x_n)$ con $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^{n-1}$. Poniamo

$$< x, y > = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad |x| = \sqrt{< x, x >}, \quad D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Se $u \in L^1(R^n)$, poniamo

$$\widehat{u}(\xi) = \int e^{-i<\xi, x>} u(x) dx, \qquad \xi \in R^n.$$

Se u è una distribuzione temperata (ossia $u \in S'$ con le indicazioni di [2]), $\widehat{u}$ è l'elemento di S' definito da

$$\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi}), \ \varphi \in S.$$

Indichiamo con $C_0^\infty(R^n)$ l'insieme delle funzioni complesse, definite su R^n, infinite volte differenziabili e nulle fuori di un compatto. Indichiamo con $\mathfrak{D}'(R^n)$ lo spazio delle distribuzioni su R^n.

Sia $\mu: R^n \to R$ una funzione continua positiva che verifica la condizione

$$\mu(\xi)\mu(\eta)^{-1} \leq C(1 + |\xi - \eta|^b), \text{ per } \xi, \eta \in R^n, \tag{1}$$

per certe costanti reali b, $C > 0$. Allora, seguendo [2] e [5], indi-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca N. 2 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

chiamo con $H_\mu(R^n)$ lo *spazio delle distribuzioni* $u \in S'$ *tali che* $\widehat{u}$ *è una funzione verificante la condizione*

$$\| u \|_\mu^2 = \int |\widehat{u}(\xi)|^2 \mu(\xi)^2 d\xi < \infty. \tag{2}$$

Ricordiamo i seguenti risultati

I) $H_\mu(R^n)$ *è completo rispetto alla norma* (2) *e* $C_0^\infty(R^n)$ *è denso in* $H_\mu(R^n)$.

II) *L'applicazione* $u \to D_n^j u|_{x_n=0}$ *è continua da* $C_0^\infty(R^n)$, *dotato della norma* (2), *a* $\mathfrak{D}'(R^{n-1})$, *dotato della topologia debole, se e solo se*

$$\mu_j(\xi')^{-2} = \int \frac{\xi_n^{2j}}{\mu(\xi)^2} d\xi_n < +\infty \tag{3}$$

per qualche $\xi' \in R^{n-1}$. *In tal caso la* (3) *vale per ogni* $\xi' \in R^{n-1}$, μ_j *verifica* (1) *e l'applicazione considerata si prolunga con continuità in un'applicazione*

$$T_j : H_\mu(R^n) \to H_{\mu_j}(R^{n-1}). \tag{4}$$

La prima affermazione è provata in [2] e [5] e la seconda in [3].

Osserviamo che, se la (3) vale per un certo intero $j \geq 0$, allora vale per ogni intero $i \leq j$, $i \geq 0$ e inoltre esiste un massimo intero p per cui vale la (3). Pertanto supponiamo

$$K_j(\xi') = \int \frac{\xi_n^j}{\mu(\xi)^2} d\xi_n \tag{5}$$

finito per $\xi' \in R^{n-1}$ e $0 \leq j \leq 2p$.

In [3] è provato che *affinchè l'applicazione "traccia"*

$$H_\mu(R^n) \ni u \xrightarrow{T} (T_0(u), \ldots, T_p(u)) \in \prod_{j=0}^{p} H_{\mu_j}(R^{n-1}) \tag{6}$$

sia su, è necessario e sufficiente che riesca

$$\begin{vmatrix} K_0 & K_1 & \ldots K_p \\ K_1 & K_2 & \ldots K_{p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ K_p & K_{p+1} & \ldots K_{2p} \end{vmatrix} \geq C K_0 K_2 \ldots K_{2p} \tag{7}$$

con $C > 0$ *indipendente da* $\xi' \in R^{n-1}$.

Qui si costruisce un inverso destro (rilevamento) continuo di T modificando una costruzione, per una μ particolare, contenuta in [4].

LEMMA. - *Per ogni* $u \in H_\mu(R^n)$ *si ha*

$$\widehat{T_j(u)}(\xi') = \frac{1}{2\pi}\int \xi_n^j \hat{u}(\xi)d\xi_n. \tag{8}$$

Se $u \in C_0^\infty(R^n)$, si ha

$$T_j(u)(x') = D_n^j u(x', 0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i<x', \xi'>}\xi_n^j \widehat{u}(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int e^{i<x', \xi'>}\left(\frac{1}{2\pi}\int \xi_n^j \widehat{u}(\xi)d\xi_n\right)d\xi',$$

e quindi la (8).

Prendiamo ora $u_r \in C_0^\infty(R^n)$, r intero positivo, tale che $\|u - u_r\|_\mu \to 0$.

Allora

$$\left(\int\left|\widehat{T_j(u)}(\xi') - \frac{1}{2\pi}\int \xi_n^j \widehat{u}(\xi)d\xi_n\right|^2 \mu_j(\xi')^2 d\xi'\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\int\left|\widehat{T_j(u)}(\xi') - \frac{1}{2\pi}\int \xi_n^j \widehat{u}_r(\xi)d\xi_n\right|^2 \mu_j(\xi')^2 d\xi'\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\int \frac{\mu_j(\xi')^2}{4\pi^2}\left|\xi_n^j[\widehat{u}_r(\xi) - \widehat{u}(\xi)]d\xi_n\right|^2 d\xi'\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \|T_j(u) - T_j(u_r)\|_{\mu_j} + \frac{1}{2\pi}\left(\int \mu_j(\xi')^2 d\xi' \int \frac{\xi_n^{2j}}{\mu(\xi)^2} d\xi_n \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \int \left|\widehat{u}_r(\xi) - \widehat{u}(\xi)\right|^2 \mu(\xi)^2 d\xi_n\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|T_j(u) - T_j(u_r)\|_{\mu_j} + \frac{1}{2\pi}\|u - u_r\|_\mu \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.$$

Questa prova la nostra affermazione.

TEOREMA. - *Sia* $f_j \in H_{\mu_j}(R^{n-1})$ *per* $0 \leq j \leq p$ *e sia*

$$\begin{vmatrix} K_0(\xi') \dots K_p(\xi') & \widehat{f}_0(\xi') \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ K_p(\xi') \dots K_{2p}(\xi') & \widehat{f}_p(\xi') \\ \dfrac{1}{\mu(\xi)^2} \dots \dfrac{\xi_n^p}{\mu(\xi)^2} & \dfrac{1}{2\pi}\widehat{u}(\xi) \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Se vale la (7), *si ha* $u \in H_\mu(R^n)$ *e*

$$\|u\|^2_\mu \leq C_1 \sum_{j=0}^{p} \|f_j\|^2_{\mu_j}, \tag{10}$$

$$T_j(u) = f_j \text{ per } 0 \leq j \leq p. \tag{11}$$

Proviamo dapprima la (11) supponendo $u \in H_\mu(R^n)$. Moltiplicando l'ultima riga in (9) per ξ_n^j e quindi integrando rispetto a ξ_n, si ottiene

$$\begin{vmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_p & \widehat{f}_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_j & K_{j+1} & \dots & K_{j+p} & \widehat{f}_j \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_p & K_{p+1} & \dots & K_{2p} & \widehat{f}_p \\ K_j & K_{j+1} & \dots & K_{j+p} & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \xi_n^j \widehat{u}(\xi) d\xi_n \end{vmatrix} = 0$$

e quindi $\widehat{f}_j(\xi') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \xi_n^j \widehat{u}(\xi) d\xi_n = \widehat{T_j u}(\xi')$, in virtù di (8).

Resta da provare la (10). Si ha

$$\begin{vmatrix} K_0 & K_1 & \dots & K_p \\ K_1 & K_2 & \dots & K_{1+p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_p & K_{p+1} & \dots & K_{2p} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha \in P_p} \varepsilon(\alpha) \prod_{j=0} K_{j+\alpha_j}, \tag{12}$$

essendo P_p l'insieme delle permutazioni di $\{0, 1, \dots, p\}$ e $\varepsilon(\alpha) = 1$ se α è pari, $\varepsilon(\alpha) = -1$ se α è dispari.

Sviluppando il determinante in (9), si ottiene

$$\begin{vmatrix} K_0 \dots K_p \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ K_p \dots K_{2p} \end{vmatrix} \frac{\widehat{u}}{2\pi} = \sum_{i,j=0}^{p} \varepsilon_{ij} \Delta_{ij} \widehat{f}_i \frac{\xi_n^j}{\mu(\xi)^2}, \tag{13}$$

ove $\varepsilon_{ij} = \pm 1$ e

$$\Delta_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & (j) & \end{array} \\ \begin{vmatrix} K_0 & \dots & 0 & \dots & K_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_p & \dots & 0 & \dots & K_{2p} \end{vmatrix} \end{array} (i).$$

Da (12) segue

$$\Delta_{ij} = \sum_{\substack{\alpha\in P_p \\ \alpha_i = j}} \varepsilon(\alpha) K_{\alpha_0} K_{1+\alpha_1} \dots K_{i-1+\alpha_{i-1}} K_{i+1+\alpha_{i+1}} \dots K_{p+\alpha_p}$$

e quindi, con C_2 indipendente da ξ',

$$|\Delta_{ij}|^2 \leq C_2 \sum_{\substack{\alpha\in P_p \\ \alpha_i = j}} K^2_{\alpha_0} K^2_{1+\alpha_1} \dots K^2_{i-1+\alpha_{i+1}} K^2_{i+1+\alpha_{i+1}} \dots K^2_{p+\alpha_p} .$$

Osserviamo ora che

$$K^2_{r+s} = \left(\int \frac{\xi_n^{r+s}}{\mu(\xi)^2} d\xi_n\right)^2 \leq \int \frac{\xi_n^{2r}}{\mu(\xi)^2} d\xi_n \cdot \int \frac{\xi_n^{2s}}{\mu(\xi)^2} d\xi_n = K_{2r} K_{2s}$$

per $0 \leq r,\ s \leq p$.

Da questo segue, osservando che $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_p\} =$ $= \{0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots p\}$,

$$|\Delta_{ij}|^2 \leq C_2 \sum_{\substack{\alpha\in P_p \\ \alpha_i = j}} K_0 K_{2\alpha_0} \cdot K_2 K_{2\alpha_1} \dots K_{2(i-1)} K_{2\alpha_{i-1}} K_{2(i+1)} K_{2\alpha_{i+1}} \dots K_{2p} K_{2\alpha_p} =$$

$$= C_2 \sum_{\substack{\alpha\in P_p \\ \alpha_i =}} K_0 K_2 \dots K_{2(i-1)} K_{2(i+1)} \dots K_{2p} \cdot K_0 K_2 \dots K_{2(j-1)} K_{2(j+1)} \dots K_{2p} \leq$$

$$\leq C_3 \frac{K_0^2 \quad K_2^2 \dots K_{2p}^2}{K_{2i} \quad K_{2j}} ,$$

con C_3 indipendente da ξ'.

Segue ora da (13) e (7), con C_4 indipendente da ξ',

$$K_0^2 K_2^2 \dots K_{2p}^2 |\widehat{u}|^2 \leq C_4 \sum_{i,\, j=}^{p} |\Delta_{ij}|^2 |\widehat{f}_i|^2 \frac{\xi_n^{2j}}{\mu(\xi)^4} ,$$

e quindi

$$K_0^2 K_2^2 \dots K_{2p}^2 \int |\widehat{u}(\xi)|^2 \mu(\xi)^2 d\xi_n \leq C_3 C_4 K_0^2 K_2^2 \dots K_{2p}^2 \sum_{i,\, j=0}^{p} |\widehat{f}_i|^2 \frac{K_{2j}}{K_{2i} K_{2j}} ,$$

$$\int |\widehat{u}(\xi)|^2 \mu(\xi) d\xi_n \leq (p+1) C_3 C_4 \sum_{i=0}^{p} |\widehat{f}_i(\xi')| \mu_i(\xi')^2,$$

$$\int |\widehat{u}(\xi)|^2 \mu(\xi)^2 d\xi \leq (p+1) C_3 C_4 \sum_{i=0}^{p} \int |\widehat{f}_i(\xi')|^2 \mu_i(\xi')^2 d\xi'.$$

Questo conclude la dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. CAVALLUCCI, *Alcuni teoremi di tracce*, « Atti Sem. Mat e Fis. Univ. di Modena XV », 137-57 (1966).

[2] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer, Berlin (1963).

[3] M. ITANO, *On a Trace Theorem for the Space* $H_\mu(R^n)$, « J. Sci. Hiroshima Univ. » A-1, 30, 11-29 (1966).

[4] B. PINI, *Sulle tracce di un certo spazio funzionale*, nota I, « Rend. Acc. Naz. Lincei VIII », 37, 28-34 (1964); nota II ibidem VIII, 38, 1-6 (1965).

[5] L. R. VOLEVICH, B. P. PANEAX, *Certi spazi di funzioni generalizzate e teoremi di immersione*, Usp. M. N. XX, 1 (121), 1-74 (1965) (in russo).

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 20 settembre 1967