Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ioan A. Rus

Théorèmes de comparaison pour les systèmes elliptiques aux dérivées partielles du second ordre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 486–490.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_486_0>

Théorèmes de comparison pour les systèmes elliptiques aux dérivées partielles du second ordre.

par Ioan A. Rus

Résumé. - *Si dimostrano teoremi di comparazione per sistemi ellittici i quali generalizzano dei risultati ottenuti da G. Cimmino.*

Dans cette presente note nous nous proposons de donner une généralisation d'un théorème de comparison de G. Cimmino pour les systèmes elliptiques aux dérivées partielles du second ordre.

1. Considérons les systèmes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{11}(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+A_{12}(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+ \tag{1}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[A_{12}(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+A_{22}(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+A_0(x,\ y)u=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[B_{11}(x,\ y)\frac{\partial v}{\partial x}+B_{12}(x,\ y)\frac{\partial v}{\partial y}\right]+ \tag{2}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[B_{12}(x,\ y)\frac{\partial v}{\partial x}+B_{22}(x,\ y)\frac{\partial v}{\partial y}\right]+B_0(x,\ y)v=0$$

où A_{ij}, B_{ij}, $i, j=1, 2$, A_0, B_0, sont des matrices carées définies sur $\bar{\Omega}\subset R^m$ (Ω est un domaine borné), $u(x, y)=(u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y))$, $v(x, y)=(v_1(x, y), \ldots, v_n(x, y))$. G. Cimmino a démontré /1/ en 1936 le théorème suivant

Théorème. (G. Cimmino). – On suppose

1. A_{ij}, B_{ij}, $i, j=1, 2$, A_0, B_0, sont des matrices carrées qui $\in C(\bar{\Omega})$ et A_{ij}, $B_{ij}\in C^1(\Omega)$.

2. Les matrices d'ordre $2n$

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & B_{22} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{Vmatrix}$$

sont positivement définies dans Ω.

3 Les matrices

$$\left\| \begin{matrix} A_{11} - B_{11} & A_{12} - B_{12} \\ A_{12} - B_{12} & A_{22} - B_{22} \end{matrix} \right\|, \qquad B_0 - A_0$$

sont positivement semi-définies dans Ω.

Alors, si l'équation (1) a une solution non-banale, $u = u(x, y)$, telle que $u|_\Gamma = 0$, le déterminant de chaque matrice-solution du système (2) ne peut pas être différent de zéro dans tout le domaine $\bar{\Omega}$.

Ce résultat a été généralisé en 1962 par L. M. Kuks [2].

Le but de cette note est de donner des théorèmes de comparaison encore plus généraux.

2. On considère les systèmes

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[A_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{m} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0(u)u = 0 \tag{3}$$

$$M(v) = \sum_{i,j=1}^{m} \left[B_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] + B_0(x)v = 0 \tag{4}$$

où $A_{ij} = A_{ij}$, $B_{ij} = B_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, m$, sont des matrices carrées d'ordre n, définies sur $\bar{\Omega} \subset R^m$, qui $\in C^1(\bar{\Omega})$ et A_0, B_0, des matrices carrées qui $\in C(\bar{\Omega})$. De plus B_{ij}, $i, j = 1, \ldots, m$, et B_0 sont symétriques.

Nous avons le résultat suivant

Théorème 1. - On suppose que

1. $\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i A_{ij} \tau_j^* > 0$, pour tout $\tau_k \in R^n$, $k = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} \|\tau_i\| \neq 0$
$\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i B_{ij} \tau_j^* > 0$, pour tout $\tau_k \in R^n$, $k = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} \|\tau_i\| \neq 0$ (Condition de Somigliana).

2. $\sum_{i,j=1}^{m} \tau_i (A_{ij} - B_{ij}) \tau_j^* - \sum_{i=1}^{m} \tau_0 A_i \tau_i^* + \tau_0 (B_0 - A_0) \tau_0^* \geq 0$ pour tout $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

Si l'équation (3) a une solution non-banale, $u = u(x)$, telle que $u|_\Gamma = 0$, alors le déterminant $|T|$ de chaque matrice-solution, T, du système (4), pour la quelle les matrices $\left(\sum_{j=1}^{m} B_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) T^{-1}$ sont symétriques, ne peut pas être différent de zéro dans tout le domaine $\bar{\Omega}$.

DÉMONSTRATION. - Soit $u = u(x)$, une solution non-banale du sistème (3) et $u|_\Gamma = 0$. Alors l'égalité

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^* A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) =$$

$$= u^* L u - \sum_{i=1}^{m} u^* A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - u^* A_0 u + \sum_{j,i=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

implique

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u^* A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - u^* A_0 u\right) dx = 0.$$

On suppose maintenant qu'il existe une matrice-solution, T, du système (4) telle que $|T| \neq 0$ dans $\bar{\Omega}$. Dans ce cas

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u^* A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - u^* A_0 u + \right.$$

$$\left. + u^*\left(\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}\right)\right) T^{-1} + u^* B_0 u\right] dx = 0.$$

d'où

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(A_{ij} - B_{ij}) \frac{du}{dx_j} - \sum_{i=1}^{m} u^* A_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + u^*(B_0 - A_0) u + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} T^{-1} u\right)^* B_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial T}{\partial x_j} T^{-1} u\right)\right] dx = 0.$$

En vertu des condition 1 et 2 il résulte que $u \equiv 0$, dans Ω, donc une contradiction.

THÉORÈME 2. - On peut remplacer la condition 2 du théorème 1 par la condition suivante

$$2'. \quad \sum_{i,j=1}^{m} \tau_i (A_{ij} - B_{ij}) \tau_j^* + \sum_{i=1}^{m} \tau_i A_i \tau_0^* + \tau_0\left(B_0 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - A_0\right)\tau_0 \geq 0$$

pour tout $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

DÉMONSTRATION. - On utilise maintenent l'identité suivante

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{m} u^* A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + u^* A_i u\right) = u^* L u + \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u^*}{\partial x_i} A_i u + \sum_{i=1}^{m} u^* \frac{\partial A_i}{\partial x_i} u - u^* A_0 u.$$

3. À l'aide d'une méthode donnée par M. H. PROTTER [3] on peut généraliser les théorèms 1 et 2 un peu. Soit $F = F_i(x)$ des matrices carrées définies dans $\bar{\Omega}$, qui $\in C^1(\bar{\Omega})$. Alors, pour tout $u = u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ telle que $u|_\Gamma = 0$ on a

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(u^* F_i u)\right] dx = 0.$$

Il en résulte aussitôt:

THÉORÈME 3. - On peut remplacer la condition 2 du théorème 1 par la condition suivant

2''. Il existe les matrices carrées F_i qui $\in C^1(\bar{\Omega})$, telles que

$$\sum_{i,j=1}^m \tau_i(A_{ij} - B_{ij})\tau_j^* + \sum_{i=1}^m \tau_0(F_i - A_i)\tau_i^* + \sum_{i=1}^m \tau_i F_i \tau_0^* +$$
$$+ \tau_0\left(B_0 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - A_0\right)\tau_0^* \geq 0$$

pour tout $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

THÉORÈME 4. - On peut remplacer la condition 2' du théorème 2 par la condition suivante

2''. Il existe les matrices carrées F_i, qui $\in C^1(\bar{\Omega})$, telles que

$$\sum_{i,j=1}^m \tau_i(A_{ij} - B_{ij})\tau_j^* + \sum_{i=1}^m \tau_i(A_i + F_i)\tau_0^* + \sum_{i=1}^m \tau_0 F_i \tau_i^* +$$
$$+ \tau_0\left(B_0 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i + F_i) - A_0\right)\tau_0 \geq 0$$

pour toute $\tau_k \in R^n$, $k = 0, 1, \ldots, m$.

4. REMARQUE 1. - Dans les théorèmes 1 et 2 on ne suppose pas la symétrie des matrices A_i, $i = 1, \ldots, m$, comme il a été le cas dans [2].

REMARQUE 2. - On peut appliquer les théorèmes 1-4 pour donner (de la même manière que dans [1] et [2]) des conditions dans lesquelles le problème de DIRICHLET pour le système (3) et le domaine Ω a une solution unique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. CIMMINO, *Teoremi di confronto fra equazioni o sistemi di equazioni differenziali lineari di second'ordine*, Rend. Sem. Mat. della Univ. di Roma, Serie IV. Vol. 1 (1936), pp 31-52.

[2] L. M. KUKS, *Theorems of the quantitative theory of strong elliptical systems of second order*, (Russian), Usp. Mat. Nauck. S S. S. R. 17, 3 (1962), pp. 181-184.

[3] M H. PROTTER, *A comparison theorem for elliptic equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 1, Nr. 2 (1959), pp. 296-299

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 1 settembre 1967