BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI PRODI

Problemi di diramazione per equazioni funzionali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.4, p. 413–433.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_4_413_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

PROBLEMI DI DIRAMAZIONE PER EQUAZIONI FUNZIONALI

GIOVANNI PRODI (Pisa) (*)

L'insieme delle soluzioni di un'equazione non lineare può presentare una struttura assai complicata, come è già evidente nel caso di uno spazio di dimensione finita. Uno degli strumenti d'indagine più comuni e più elementari è quello che consiste nell'introdurre un parametro e nell'individuare i punti per cui viene a cadere l'omeomorfismo locale tra parametro e soluzioni: cioè i punti di diramazione.

Nel corso di questa relazione prenderò in esame un problema tipico di diramazione per equazioni non lineari negli spazi di BANACH, che ora introdurrò.

Sia B uno spazio di BANACH sul corpo reale e sia A un operatore definito in un intorno U dell'origine di B. Salvo avviso contrario, noi supporremo sempre A compatto (con terminologia più tradizionale: completamente continuo).

Supporremo $A(0) = 0$; l'equazione

$$\lambda u - A(u) = 0 \tag{1}$$

in cui λ è un parametro reale, possiede allora, per ogni λ, la soluzione nulla. Ciò premesso, poniamo la seguente definizione:

(*) Conferenza tenuta il 3 ottobre 1967 all' VIII Congresso nazionale dell' U. M. I. (Trieste, 2-7 ottobre 1967).

Si dice che il numero reale λ_0 è punto di *diramazione* per la (1) se in ogni intorno di $(\lambda_0, 0)$ in $\boldsymbol{R} \times B$ si trovano soluzioni (λ, u) della (1), con $u \neq 0$.

Naturalmente, si può porre il problema di indagare sulle proprietà delle nuove soluzioni trovate (cioè del nuovo «ramo», non banale): sono un insieme connesso in $\boldsymbol{R} \times B$? (o è, almeno, un insieme connesso la loro proiezione su B?). Valgono particolari rappresentazioni analitiche? (Possiamo pensare, ad esempio, a sviluppi analoghi a quelli di PUISEUX).

È bene, comunque, partire da una definizione ampia come quella introdotta: in realtà, in molti problemi concreti, anche la sola risposta al quesito se un certo punto λ_0 sia o non sia di diramazione presenta difficoltà molto serie.

Il problema posto si può considerare come la naturale estensione al caso non lineare del problema della ricerca degli autovalori per un operatore lineare. Infatti, se A è lineare ed ha come autovalore λ_0, λ_0 è punto di diramazione secondo la nostra definizione. Alcuni autori hanno trasferito al caso non lineare la terminologia in uso nel caso lineare: si parla così di autosoluzioni per indicare le soluzioni non nulle della (1), di autovalori, di spettro. Ma non pare il caso di spingere l'analogia troppo in là: ciò che veramente si estende al caso non lineare è l'aspetto locale del problema, cioè il fenomeno della diramazione. Per il resto, non fa meraviglia che il caso non lineare presenti spesso una completa diversità di comportamento (nel caso non lineare, ad esempio, lo «spettro», in generale, conterrà interi intervalli).

Sempre a proposito di terminologia, osserviamo che, specialmente per il tipo di problema che abbiamo preso in esame, si usa spesso il termine di *biforcazione*, anzichè diramazione.

Molti importanti problemi di matematica applicata si possono inquadrare nella ricerca dei punti di diramazione per un'equazione del tipo (1), come si vedrà negli esempi che seguiranno: anche il parametro λ ha spesso un significato fisico preciso.

Per fare un cenno alla storia del problema, ricorderò che esso venne posto (per equazioni integrali costruite con speciali operatori integrali) da E. SCHMIDT [5], nella terza delle sue memorie sulle equazioni integrali, pubblicata nel 1908.

Poco tempo prima LYAPUNOV [6] aveva tradotto in un problema di diramazione il celebre problema della configurazione di equilibrio di un fluido rotante sottoposto all'azione della attrazione gravitazionale, e aveva dimostrato l'esistenza di nuovi rami di soluzioni.

Successivamente, ad opera di vari autori (A. J. NEKRASOV [7], L. LICHTENSTEIN [8], A. HAMMERSTEIN [9], ed altri), i metodi di LYAPUNOV e SCHMIDT sono venuti a chiarirsi, anche per il contemporaneo progredire della teoria delle equazioni funzionali lineari. L'aspetto più profondo di queste ricerche — pur con sviluppi diversi — sta nel ridurre il problema allo studio di un'equazione in uno spazio di dimensione finita (l'equazione di diramazione). Nel § 1 farò un rapido esame di questo metodo, che dirò metodo analitico; nella mia presentazione, peraltro, mi terrò ad un livello di generalità assai inferiore a quello in cui si possono inquadrare oggi i risultati di questa teoria. Accennerò brevemente alle estensioni più importanti.

Un secondo metodo d'indagine è quello che si basa sulla nozione di grado topologico introdotta da LERAY e SCHAUDER nella celebre memoria del 1934 [10]. Nel § 2 di questa relazione, dopo aver richiamato il fondamento di questo metodo, espongo una importante applicazione fatta recentemente da W. VELTE [14]: la dimostrazione di non unicità per un problema riguardante il sistema di NAVIER-STOKES stazionario (¹).

Altri metodi sono quelli che riguardano i problemi di tipo variazionale, cioè i problemi di tipo (1) in cui l'operatore A è gradiente di un funzionale. Questi metodi hanno avuto origine da noti procedimenti introdotti per lo studio dei punti stazionari (o critici) dei funzionali.

Nel § 3, dopo aver esposto un importante risultato di KRASNOSEL'SKII, cercherò di chiarire i rapporti che intercorrono tra questo ed alcune ricerche di E. H. ROTHE [19] [20] riguardanti l'estensione agli spazi di HILBERT della teoria di MORSE. Riporterò, come esempio di applicazione, un risultato di M. S. BERGER [22] su un problema della teoria non lineare della elasticità.

Come risulterà evidente, questa esposizione non ha pretese di completezza e tende a dare solamente un'idea di questo tipo di questioni e dei metodi che vi si applicano; chi volesse una più ampia informazione (anche dal punto di vista storico) potrà consultare l'estesa monografia di VAINBERG e TRENOGIN [4] per la materia del § 1, e le opere [1], [2] di KRASNOSEL'SKII, [3] di VAINBERG per i rimanenti argomenti.

(¹) Esempi di non unicità per taluni problemi «esterni» si conoscevano già da prima. Ma qui il problema è di diversa natura.

1. - Il metodo analitico.

Cominciamo con una constatazione di carattere generale, valida per un operatore A (anche non compatto) dotato di derivata di FRÉCHET $A'(0)$ nel punto 0:

I - L'insieme dei punti di diramazione per la (1) è contenuto nello spettro di $A'(0)$.

Infatti, essendo $A(0) = 0$, vale la rappresentazione $A(u) = A'(0)u + o(|u|)$; sia ora λ_0 un punto di diramazione: esisterà una successione (λ_n, u_n) in $\boldsymbol{R} \times B$ con $u_n \neq 0$, tale che $\lambda_n u_n - A(u_n) = 0$ e $\lim_{n \to 0} \lambda_n = \lambda_0$, $\lim_{n \to 0} u_n = 0$.
Si avrà:

$$(2) \qquad \lambda_n u_n - A'(0)u_n = \sigma_n \quad \text{con} \quad \sigma_n = o(|u_n|).$$

Supponiamo, per assurdo, che λ_0 non appartenga allo spettro di $A'(0)$, cioè che esista l'operatore $[\lambda_0 I - A'(0)]^{-1}$; applicando questo alla (2), si ottiene:

$$u_n = [\lambda_0 I - A'(0)]^{-1}(\sigma_n - (\lambda_n - \lambda_0)u_n)$$

dividendo membro a membro per $|u_n|$ e ponendo $|u_n|^{-1}u_n = z_n$, $|u_n|^{-1}(\sigma_n - (\lambda_n - \lambda_0)u_n) = \xi_n$ si ha

$$z_n = [\lambda_0 I - A'(0)]^{-1}\xi_n$$

ma ciò contrasta con la continuità di $[\lambda_0 I - A'(0)]^{-1}$, essendo $|z_n| = 1$, mentre ξ_n è una successione infinitesima.

Se A è compatto. come è noto, anche $A'(0)$ è compatto. Dunque un punto di diramazione $\lambda_0 \neq 0$ è un autovalore di $A'(0)$.

La condizione di appartenere allo spettro è però soltanto necessaria affinchè λ_0 sia un punto di diramazione: consideriamo infatti il seguente semplice esempio.

Sia $B = \boldsymbol{R}^2$, $A : (x, y) \to (x + y^3, y - x^3)$. Ovviamente, il punto $\lambda_0 = 1$ è un autovalore per $A'(0)$ (che è l'indentità), ma si verifica che l'equazione $\lambda(x, y) - A(x, y) = 0$ ha, per ogni valore di λ, solo la soluzione nulla. Quindi non esistono punti di diramazione. D'ora in poi considereremo sempre A compatto e cercheremo di dare condizioni sufficienti affinchè un autovalore $\lambda_0 \neq 0$ di $A'(0)$ sia punto di diramazione.

Indichiamo con V la varietà (di dimensione n) nucleo dell'operatore $\lambda_0 I - A'(0)$, con S la varietà-immagine (di codimensione n), che si caratterizza, come è noto, come varietà degli elementi s tali che $<s|v^*> = 0$ per ogni funzionale $v^* \in B^*$ appartenente alla varietà V^* delle autosoluzioni della equazione aggiunta. Possiamo associare a V una varietà complementare W: indichiamo con p e q le proiezioni su V e W rispettivamente. Associamo poi ad S una varietà complementare Z (di dimensione n). L'equazione $\lambda_0 w - A'(0)w = s$ ha una ed una sola soluzione in W per ogni $s \in S$; risulta così definito in S un operatore continuo $s \to w$, a valori in W; indichiamo con T l'operatore $B \to W$ che coincide con questo operatore in S e si annulla in Z.

Nell'ipotesi che A sia di classe $\mathcal{C}^1$, cioè sia dotato di derivata di FRÉCHET continua (ricordiamo $A'(u)$ è un elemento di $\mathfrak{L}(B, B)$ e che la continuità va intesa secondo la norma di questo spazio), la (1) si può mettere nella forma:

$$\lambda u - A'(0)u = \rho(u) \tag{3}$$

essendo $\rho(u)$ un operatore di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $\rho'(0) = 0$, $\rho(u) = o(u)$. Poniamo ora $pu = v$, $qu = w$, $\lambda - \lambda_0 = \mu$. Allora la (3) risulta equivalente al sistema

$$\begin{cases} <\mu(v + w) - \rho(v + w) \,|\, v^* > = 0 \quad \text{per ogni} \quad v^* \in V^* \\ \lambda_0 w - A'(0)w = -\mu(v + w) + \rho(v + w). \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo, sempre sussistendo la prima,

$$w = T(-\mu(v + w) + \rho(v + w)). \tag{4}$$

Questa, d'altra parte, per il teorema del DINI esteso agli spazi di BANACH (vd., ad es., [12]), è localmente risolubile rispetto a w; si ottiene dunque

$$w = \gamma(\mu, v)$$

essendo γ un'applicazione di classe $\mathcal{C}^1$ definita in un intorno dell'origine di $\boldsymbol{R} \times V$, a valori in W.

In conclusione, la (1) risulta localmente equivalente al sistema

$$\begin{cases} <\mu(v + \gamma(\mu, v)) + \rho(v + \gamma(\mu, v)) \,|\, v^* > = 0 \quad \text{per ogni} \quad v^* \in V^* \\ w = \gamma(\mu, v). \end{cases} \tag{5}$$

La prima di queste equazioni si dice *equazione di diramazione* ed è impostata su un aperto di uno spazio di dimensione finita: $\boldsymbol{R} \times V$; si può tradurla in un sistema di n equazioni scalari (tante quante sono le dimensioni di V^*). Il nostro problema è dunque tradotto in un problema di dimensione finita; è pure interessante notare che, in base al sistema (5), le soluzioni dell'equazione (1), in un intorno del punto $(\lambda_0, 0)$, si possono rappresentare cartesianamente su un sottoinsieme di uno spazio lineare di dimensione finita.

Naturalmente, con la traduzione nel sistema (5), il nostro problema è tutt'altro che risolto; occorre trovare criteri che assicurino l'esistenza di soluzioni non banali per l'equazione di diramazione e che indaghino sulla natura di queste, sotto ipotesi particolari. A questo riguardo, dobbiamo limitarci a qualche semplice osservazione.

Una circostanza che introduce qualche semplificazione nella nostra ricerca è quella formulata nella seguente ipotesi.

Ipotesi (F) - Il nucleo di $\lambda_0 I - A'(0)$ coincide con il nucleo $[\lambda_0 I - A'(0)]^2$.

Nell'ipotesi (F), pertanto, il nucleo di $\lambda I - A'(0)$ coincide con il sottospazio invariante associato all'autovalore λ_0.

In questo caso (secondo la teoria di Riesz) l'immagine S è una varietà complementare di V e si può dunque prendere $W = S$; evidentemente, poi, si può prendere $Z = V$. Ricordando, il modo con cui è stato definito T, si ha $T(v) = 0$, e perciò la (4) può scriversi nella forma:

$$w = T(-\mu w + \rho(v + w)). \tag{4'}$$

La prima delle (5) esprime l'appartenenza di $\mu(v + \gamma(\mu, v)) + \rho(v + \gamma(\mu, v))$ ad S e, perciò, essa può venire espressa ora nella forma $p(\mu(v + \gamma(\mu, v)) + \rho(v + \gamma(\mu, v))) = 0$; pertanto, tenendo conto del fatto che $p\gamma(\mu, v) = 0$, in luogo del sistema (5) abbiamo ora il sistema

$$\begin{cases} \mu v - p(\rho(v + \gamma(\mu, v))) = 0 \\ w = \gamma(\mu, v). \end{cases} \tag{5'}$$

Dal sistema (5') si può dedurre facilmente il seguente criterio:

II - Se λ_0 è autovalore semplice per l'operatore $A'(0)$, allora λ_0 è punto di diramazione.

Infatti, sia $\bar{v}$ un'autosoluzione; possiamo porre: $v = \bar{v}\xi$, $p(\rho(\bar{v}\xi + \gamma(\mu, \bar{v}\xi)) = \bar{v}\psi(\xi, \mu)$. L'equazione di diramazione diventa allora

$$\mu\xi = \psi(\xi, \mu).$$

Ora, dall'esame della (4'), tenendo conto che è $\rho(u) = o(|u|)$, si ricava facilmente che $\psi(\xi, \mu)$ è infinitesima di ordine superiore al primo rispetto a ξ, uniformemente al variare di μ in un opportuno intorno di $0 : [-\delta, +\delta]$. Allora è possibile assegnare un $\eta > 0$ tale che per ogni $\xi \in [-\eta, +\eta]$ con $\xi \neq 0$ e per ogni $\mu \in [-\delta, +\delta]$ si abbia

$$\left| \frac{\psi(\xi, \mu)}{\xi} \right| \leq \delta.$$

Ciò significa che, per ogni $\xi \in [-\eta, +\eta]$, $\xi \neq 0$, la funzione continua $\mu \to \frac{\psi(\xi, \mu)}{\xi}$ porta l'intervallo $[-\delta, +\delta]$ in sè; esiste allora un μ tale che sia $\mu = \frac{\psi(\xi, \mu)}{\xi}$. Con ciò viene provata l'esistenza di una diramaziome.

Facciamo ora un'ulteriore ipotesi

Ipotesi (T) - L'operatore A sia analitico.

Con questo intendiamo dire che esiste una successione $A^{(n)}(0)$ di operatori (dove $A^{(n)}(0)$ è n-lineare simmetrico e rappresenta la derivata n-sima di A nel punto 0) tali che si abbia, uniformemente in un intorno di 0:

$$A(u) = A(0) + A'(0)(u) + \frac{1}{2!} A''(0)(u)^2 + \dots + \frac{1}{n!} A^{(n)}(0)(u)^{(n)} + \dots .$$

Tenendo presente che è $A(0) = 0$, nel nostro caso si può porre:

$$\rho(u) = \frac{1}{2!} A''(0)(u)^2 + \dots + \frac{1}{n!} A^{(n)}(0)(u)^{(n)} + \dots .$$

Applicando alla (4') la versione analitica del teorema del Dini, si ottiene per γ l'espressione

$$\gamma(\mu, v) = \alpha(v)^2 + \sigma(\mu, v)$$

dove α è l'operatore bilineare simmetrico $\frac{1}{2} TA''(0)$ e σ è un operatore analitico tale che, in un intorno dell'origine di $\boldsymbol{R} \times V$, si abbia: $\| \sigma(\mu, v) \| \leq k(|\mu| \, \|v\|^2 + \|v\|^3)$.

Supponiamo ora che valga anche l'ipotesi (F) e cerchiamo una soluzione della prima delle (5') della forma $v = v_1\mu + v_2(\mu)\mu^2$ dove v_1 è vettore non nullo e v_2 è funzione analitica di μ. Sostituendo, si trova con facili calcoli:

$$v_1\mu^2 + v_2(\mu)\mu^3 = \mu^2 \frac{1}{2} pA''(0)(v_1)^2 + \mu^3 p[A''(0)(v_1)(v_2(\mu)) + \frac{1}{3!} A'''(0)(v_1)^3 + \\ + \mu\psi(\mu, v_1, v_2(\mu))]$$

essendo sempre $\psi(\mu, v_1, v_2)$ una funzione analitica dei suoi tre argomenti $(\mu \in \boldsymbol{R},\ v_1\ v_2 \in V)$.

Da questa si ottiene immediatamente il sistema equivalente

$$(6) \qquad \begin{cases} v_1 - \frac{1}{2} pA''(0)(v_1)^2 = 0 \\ v_2(\mu) - pA''(0)(v_1)(v_2(\mu)) = \frac{1}{3!} A'''(0)(v_1)^3 + \mu p\psi(\mu, v_1, v_2(\mu)). \end{cases}$$

Dunque, una condizione necessaria perchè si abbia una diramazione del tipo cercato è che la prima di queste equazioni abbia (in V) una soluzione v_1 non nulla; ammettiamo che una tale v_1 ci sia e cerchiamo una condizione sufficiente.

Si verifica facilmente, in base al teorema del DINI, che, se l'applicazione lineare di V in V:

$$(7) \qquad x \to x - pA''(0)(v_1)(x)$$

è invertibile, la seconda equazione è univocamente risolubile rispetto a v_2 e la funzione $v_2(\mu)$ risulta analitica.

Concludendo:

III - L'operatore A sia analitico e per λ_0, autovalore non nullo di $A'(0)$, valga l'ipotesi (F). Si supponga inoltre che:

la prima delle (6) abbia una soluzione v_1 non nulla

l'applicazione (7) di V in V sia invertibile.

Allora la (1) ha in λ_0 una diramazione rappresentabile nella forma

$$v = \mu v_1 + \mu^2 v_2(\mu), \qquad w = \mu^2 w_2(\mu), \qquad \text{essendo} \quad \mu = \lambda - \lambda_0,$$

ed essendo v_2 e w_2 funzioni analitiche di μ, a valori in V e W rispettivamente.

In modo analogo si può dimostrare la seguente proposizione.

IV - L'operatore A sia analitico e per λ_0, autovalore non nullo di $A'(0)$, valga l'ipotesi (F). Si supponga inoltre che:

sia $pA''(0) = 0$

l'equazione $v_1 \mp \frac{1}{3!} pA''(0)(v_1)^3 = 0$ abbia in V una soluzione $v_1 \neq 0$

e, in corrispondenza ad essa, l'applicazione lineare di V in V:

$$x \to x \mp \frac{1}{2} A'''(0)(v_1)^2(x) \tag{7'}$$

sia invertibile. Allora, la (1) ha in λ_0 una diramazione rappresentabile nel seguente modo per mezzo del parametro τ variabile in un intorno dello 0:

$$v = \tau v_1 + \tau^2 v_2(\tau), \qquad w = \tau^2 w_2(\tau). \qquad \mu = \lambda - \lambda_0 = \mp \tau^2$$

essendo v_2 e w_2 funzioni analitiche di τ, a valori in V e W rispettivamente.

(In questo enunciato, dove compare il doppio segno, occorre prendere sempre quello superiore o quello inferiore).

OSSERVAZIONE. - L'operatore lineare (7) è il differenziale dell'operatore, che compare primo membro nella prima delle (6)

$$v \to v - \frac{1}{2} pA''(0)(v)^2.$$

Quindi l'invertibilità dell'operatore (7) esprime il fatto che la soluzione v_1 è semplice nel senso più ovvio. Analoga osservazione vale per l' operatore (7').

Prima di lasciare l'argomento, accenniamo ad alcune estensioni del problema che abbiamo studiato.

Nei lavori di BARTLE [23] e, successivamente di VAINBERG e TRENOGIN (vd.[4]), è stata considerata l'equazione $F(x, y) = 0$ dove F è un'applicazione, soddisfacente ad opportune condizioni di regolarità, $: E_1 \times E_2 \to E_3$, essendo E_1, E_2, E_3 spazi di BANACH (reali o complessi) e si suppone $F(0, 0) = 0$. La variabile y ha il ruolo di parametro. Se l'operatore $F_x(0, 0) : E_1 \to E_3$ non è invertibile, non si può applicare il teorema del DINI. Ma se questo operatore ha immagine chiusa ed ha nucleo e conucleo di dimensione finita, l'essenziale del procedimento che abbiamo descritto può conservarsi e si può scrivere l'equazione di diramazione. Il BARTLE considera il caso in cui nucleo e conucleo di $F_x(0, 0)$ hanno la stessa dimensione; VAINBERG e TRENOGIN il caso generale. Come applicazione, si possono considerare problemi di diramazione per equazioni non lineari costruite mediante integrali singolari (già considerati precedentemente da vari autori). Nel caso in cui nucleo e conucleo abbiano dimensione 1, BARTLE presenta una accurata indagine sui rami, basata sui diagrammi di NEWTON, che vengono adattati anche alla ricerca dei rami reali.

Segnaliamo infine che J. SCHWARZ [25], partendo da una precedente ricerca di J. CRONIN [24], ha studiato il problema della diramazione per l'equazione $x - A(\lambda, x) = 0$ essendo x variabile in un aperto di uno *spazio di Banach complesso* contenente il punto 0, ed essendo A analitica rispetto al parametro complesso λ e rispetto ad x. Egli suppone A compatto e tale che $A(\lambda, 0) = 0$ per ogni λ. Egli perviene al seguente notevole risultato: se λ_0 è tale che 1 appartenga allo spettro di $A'_x(\lambda_0, 0)$, senza che questo accada per altri valori di λ in un intorno di λ_0, e se 0 è una soluzione isolata dell'equazione $x - A(\lambda_0, x) = 0$, allora λ_0 è un punto di diramazione e vi è un ramo di soluzioni non nulle esprimibili in funzione di $\lambda - \lambda_0$ mediante una serie di PUISEUX: $x(\lambda) = \sum_0^\infty {}_m x_m(\lambda - \lambda_0)^{m/k}$ (k intero > 0). La dimostrazione di SCHWARZ utilizza sia procedimenti analitici che la tecnica di LERAY-SCHAUDER.

2 - Impiego del grado topologico. Un'applicazione all'Idrodinamica.

Il metodo che stiamo per esporre si fonda su un semplice corollario della teoria di LERAY-SCHAUDER (²).

Noi supponiamo che A, oltre ad essere compatto, abbia derivata di FRÉCHET continua.

In base alla teoria di LERAY-SCHAUDER, si chiama indice di una soluzione isolata u_0 dell'equazione $u - A(u) = 0$ il grado topologico della trasformazione $u \to u - A(u)$ relativo ad una sfera con centro u_0 e raggio abbastanza piccolo. Se entro un certo dominio D cade solo un numero finito di soluzioni, il grado topologico è la somma degli indici di queste.

L'indice di una soluzione isolata u_0 è facilmente determinabile se l'equazione $v - A'(u_0)v = 0$ non ha autosoluzioni: si dimostra che esso è uguale a $(-1)^m$, dove m è il numero degli autovalori > 1 contati con la loro molteplicità (qui per molteplicità s'intende la dimensione del sottospazio invariante associato all'autovalore).

Veniamo dunque al nostro problema, che è quello di decidere se un certo λ_0, autovalore dell'operatore $A'(0)$, è punto di diramazione. Si ha (vd., ad esempio, [1] Cap. III):

(²) Per un'esposizione di questa rinviamo, oltre che alla classica memoria [10], alle monografie [11] e [12].

Se è $\lambda_0 \neq 0$ e se λ_0 è autovalore di molteplicità dispari, allora è punto di diramazione per la (1).

Infatti, supponiamo $\lambda_0 > 0$ e consideriamo un intervallo $[\lambda_1, \lambda_2]$ tale che $0 < \lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ e che in esso non cadano altri autovalori di $A'(0)$. Sia P_ρ una sfera chiusa con centro nell'origine di B e raggio ρ, e sia S_ρ la sua frontiera in B. Poichè nè λ_1 nè λ_2 possono essere punti di diramazione, esiste un $\bar{\rho} > 0$ tale nella sfera $P_{\bar{\rho}}$, le equazioni $\lambda_1 u - A(u) = 0$, $\lambda_2 u - A(u) = 0$ non hanno altre soluzioni oltre a quella nulla.

A questo punto, supponiamo per assurdo che nell'insieme $[\lambda_1, \lambda_2] \times S_\rho$ con $\rho \leq \bar{\rho}$, non vi siano soluzioni (λ, u) della (1). Allora, il grado di LERAY-SCHAUDER dell'applicazione $u \to u - \frac{1}{\lambda} A(u)$ rispetto alla sfera P_ρ si mantiene immutato nel passare dal valore λ_1 al valore λ_2 del parametro. Per $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$ il grado rispetto a P_ρ non è che l'indice della soluzione nulla. Ma ciò non può essere perchè nel nostro caso, applicando la regola per il calcolo dell'indice che abbiamo richiamato, si trova che l'indice passa da $+1$ a -1 (o viceversa) nel passare da $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$.

Dall'assurdo si deduce che, per ogni $\rho \leq \bar{\rho}$, l'insieme $[\lambda_1, \lambda_2] \times S\rho$ contiene una soluzione della (1): questo ci dice, tenuto conto della arbitrarietà con cui si può prendere l'intervallo $[\lambda_1, \lambda_2]$, che λ_0 è un punto di diramazione per la (1).

Nella dimostrazione che abbiamo fatto, la sfera P_ρ può essere sostituita con un qualsiasi dominio contenuto in P_ρ e avente l'origine come punto interno: ciò permette di dimostrare che in B l'insieme di tutte le soluzioni u della (1) per $\lambda \in [\lambda_2, \lambda_2]$ contiene un continuo congiungente l'origine con $S_{\bar{\rho}}$. Precisamente: la componente connessa contenente il punto 0 contiene necessariamente qualche punto di $S_{\bar{\rho}}$.

Si è portati anche a porre la congettura più forte: che l'insieme delle soluzioni della (1) (λ, u). per $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ contenga un continuo congiungente il punto $(\lambda_0, 0)$ con un punto di $[\lambda_1, \lambda_2] \times S_{\bar{\rho}}$: non conosco risultati al riguardo.

Nel caso che λ_0 sia autovalore semplice, ritroviamo un risultato che avevamo riferito nella prima parte.

Il metodo che abbiamo esposto non fornisce rappresentazioni analitiche per le soluzioni del nostro problema: in compenso esso richiede un minimo di informazione, essendo sufficiente l'esame dell'equazione linearizzata $\lambda_0 v - A'(0)v = 0$. Che poi non si possa prescindere dall'ipotesi della disparità di λ_0 risulta ovvio dall'esempio che abbiamo premesso nel § 1.

Spesso, quando il problema che si considera presenta una formulazione complicata, il ricorso all'equazione linearizzata è l'unica via praticamente possibile. È il caso dei problemi che si incontrano nella teoria dei fluidi viscosi: in questo campo sono stati ottenuti recentemente alcuni risultati significativi da W. VELTE. Sorvoliamo sul primo dei problemi da lui considerati [13], che riguarda i moti convettivi termici di un fluido, nel caso bidimensionale (la trattazione è stata estesa al caso tridimensionale da A. MARINO [14]). Dedichiamo invece un esame approfondito ad un successivo lavoro di VELTE, in cui, per la prima volta, si arriva a dare un esempio di non unicità per un classico problema di idrodinamica.

Si tratta del moto di un liquido viscoso fra due cilindri coassiali di raggi r_1 ed r_2 $(r_1 < r_2)$: il sistema stazionario di NAVIER-STOKES possiede in questo caso una soluzione a simmetria assiale che si determina elementarmente (fluido di COUETTE). Il problema è quello di vedere se, in accordo con i ben noti calcoli sulla stabilità e con le esperienze condotte da G. I. TAYLOR ([3]), può presentarsi una seconda soluzione, per opportuni valori dei dati.

Il VELTE considera il caso di cui la velocità del cilindro esterno sia nulla e imposta il problema sotto forma di ricerca di una biforcazione, a partire dalla soluzione di COUETTE.

Seguendo manipolazioni ben note, il VELTE ottiene il seguente sistema in due incognite f e v, funzioni delle due variabili r e z:

$$\left\{\begin{aligned} &\nu\mathfrak{L}^2 f + a(r)v_z + M(f,\, v) = 0 \\ &\nu\mathfrak{L}^2 v + bf_z \quad + N(f,\, v) = 0 \end{aligned}\right. \tag{8}$$

dove ν è un parametro positivo (è il reciproco del numero di REYNOLDS del problema), $\mathfrak{L}$ è l'operatore

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}$$

$a(r)$ è una funzione non negativa assegnata, e b una costante positiva. M ed N sono espressioni piuttosto complicate, che hanno la forma di polinomio omogeneo di secondo grado nel complesso delle seguenti variabili: f e v, derivate di f fino all'ordine 2 e di v fino all'ordine 1.

Le condizioni ai limiti sono:

$$f(r_1, z) = f(r_2, z) = f_r(r_1, z) = f_r(r_2, z) = 0, \quad v(r_1, z) = v(r_2, z) = 0. \tag{9}$$

([3]) Per ulteriori notizie su questo problema rimandiamo alla monografia di LIN [16].

Si cercano soluzioni periodiche di periodo L rispetto a z: il problema è quello di vedere se il sistema (8), per certi valori di ν e di L, possiede altre soluzioni oltre a quella nulla. Per poter assicurare che i termini non lineari siano a quadrato sommabile nel rettangolo di periodicità, conviene ambientare il problema nello spazio delle coppie di funzioni (f, v) periodiche rispetto a z di periodo L, tali che f abbia derivate fino all'ordine 4 e v derivate fino all'ordine 2, a quadrato sommabile in $[r_1, r_2] \times [0, L]$, e soddisfacenti inoltre alle condizioni ai limiti (9).

È opportuno restringere ulteriormente la classe in cui si cerca la soluzione imponendo che f sia funzione pari e v funzione dispari rispetto alla variabile z.

Indicando con $-S$ l'operatore inverso di $\mathfrak{L}^2$, con $-T$ l'operatore inverso di $\mathfrak{L}$ (con le condizioni ai limiti assegnate), il problema prende la forma:

$$(10) \qquad \begin{cases} \nu f - S(av_z + M(f, v)) = 0 \\ \nu v - T(bf_z + N(f, v)) = 0. \end{cases}$$

Ora, il differenziale di Fréchet degli operatori quadratici compatti $S(M(f, v))$ ed $T(N(f, v))$ è nullo nel punto $(0, 0)$: quindi si tratta ormai di vedere se l'operatore compatto

$$(f, v) \to (S(av_z), \ T(bf_z))$$

ha un autovalore positivo *semplice*.

Sviluppando in serie di Fourier rispetto a z.

$$f(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \operatorname{sen} n\sigma z, \qquad v(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r) \cos n\sigma z \qquad \left(\sigma = \frac{2\pi}{L}\right)$$

si ottiene il sistema di infinite equazioni ordinarie:

$$(11) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{M} - (n\sigma)^2)^2 f_n(r) = \lambda a(r) n\sigma v_n(z) \\ -(\mathfrak{M} - (n\sigma)^2)^2 v_n(r) = \lambda b n\sigma f_n(r) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dove è $\mathfrak{M} = \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{1}{r^2}$, e le condizioni ai limiti sono $f_n(r) = f'_n(r) = v(r) = 0$ per $r = r_1$, $r = r_2$.

Occorre tener presente, a questo punto, che anche σ è un parametro che può essere preso in modo opportuno. Il Velte dimostra, ingegnosamente, che se si riesce a trovare un $k \neq 0$ tale che il sistema (in due incognite):

$$(12) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{M} - k^2)^2 f = \lambda a(r) k v \\ -(\mathfrak{M} - k^2) v = \lambda b k f \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{con le condizioni} \\ f(r) = f'(r) = v(r) = 0 \\ \text{per } r = r_1, \ r = r_2 \end{array}$$

abbia un autovalore semplice λ_0 allora si può fissare σ in modo tale che il sistema infinito (11) abbia pure λ_0 come autovalore semplice. Non sembrando possibile applicare al sistema (12) i metodi variazionali, il VELTE applica risultati riguardanti la esistenza di autovalori per operatori compatti di tipo positivo. Su questo punto l'esposizione del VELTE presenta qualche lacuna: in particolare, non pare dimostrato (neppure nella bibliografia indicata) il carattere positivo dell'operatore che risolve il problema $(\mathfrak{M} - k^2)^2 f = g$, con le condizioni al contorno $f(r) = f'(r) = 0$ per $r = r_1$ ed $r = r_2$. Tuttavia, questa proprietà sussiste, come risulta da una dimostrazione che mi è stata comunicata da DE GIORGI.

Concludendo, il sistema (10), per opportuni valori del periodo L, presenta una diramazione rispetto al parametro ν. Risulta così provata, in questi casi, la non unicità.

Mi pare che l'importanza del risultato sia tale da giustificare l'ampiezza che abbiamo dato all'esposizione di questo esempio.

3. - Caso degli operatori-gradiente. Un'applicazione della teoria dell'elasticità.

Il problema della diramazione prende un aspetto particolare se lo spazio B (sempre lineare sul corpo reale) è di HILBERT e se l'operatore A è un operatore-gradiente. Con questo intendiamo dire che esiste un funzionale dotato di derivata di FRÉCHET a' tale che in ogni punto u si possa porre:

$$a'(u)(z) = (A(u) \mid z).$$

Scriviamo allora $A(u) = \operatorname{grad} a(u)$; se $a'(u)$ ha, a sua volta, derivata di FRÉCHET, cioè se a ha differenziale secondo in ogni punto, questo si può scrivere nella forma:

$$a''(u)(w)(z) = (A'(u)(w) \mid z)$$

e, per la simmetria del differenziale secondo, si avrà $(A'(u)(w) \mid z) = (A'(u)(z) \mid w)$ cioè $A'(u)$ sarà necessariamente, in ogni punto u, un operatore simmetrico. Questa condizione di simmetria, se A è definito in tutto B ed A' è continuo, è anche sufficiente perchè A sia un operatore-gradiente.

Per gli operatori-gradiente A (che si possono anche dire operatori variazionali) le soluzioni dell'equazione (1), per λ fissato, non sono altro che i punti *stazionari* (o *critici*) per il funzionale $\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{2} \lambda \mid u \mid^2 - a(u)$.

Sull'esistenza di punti critici per funzionali di questo tipo si conoscono numerosi risultati basati sulla ricerca di punti di massimo e su altri principi più raffinati (ci riferiamo soprattutto alla teoria di LUSTERNIK e SCHNIRELMAN, fondata sulla nozione di categoria di uno spazio topologico, che è stata estesa agli spazi ad infinite dimensioni da VAINBERG [3] KRASNOSEL'SKII [2] e, successivamente, da J. SCHWARZ [17], F. BROWDER [18], ed altri).

È evidente che i teoremi i quali assicurano l'esistenza di soluzioni non nulle per la (1) possono servire per provare l'esistenza di punti di diramazione, quando si possa affermare, in più, che esiste una successione di soluzioni (λ_n, x_n) con λ_n limitato e x_n infinitesimo. Ma, per il problema particolare che ci interessa, è soprattutto utile il seguente teorema dovuto a KRASNOSEL'SKII, che è di dimostrazione assai elaborata ([4]):

Sia A un operatore compatto, gradiente di un funzionale uniformemente differenziabile nello spazio di HILBERT B: inoltre A sia differenziabile secondo FRÉCHET nel punto 0: allora ogni autovalore non nullo di $A'(0)$ è un punto di diramazione per A.

Dunque nel caso degli operatori variazionali si ha una completa giustificazione del procedimento di linearizzazione per la ricerca dei punti di diramazione.

Lo scopo di quanto ora esponiamo è di mettere in collegamento questo importante risultato con alcune interessanti ricerche di ROTHE [19] [20] rivolte ad estendere agli spazi di HILBERT la teoria di MORSE.

Riprendiamo la dimostrazione svolta nel n. 2: in quel caso ci siamo serviti, come invariante di omotopia, del grado di LERAY-SCHAUDER. Passando agli operatori-gradiente, possiamo sperare di trovare degli invarianti di omotopia più fini di grado di LERAX-SCHAUDER. In effetti, questi invarianti possono venire forniti dalla teoria di MORSE.

Nel nostro caso si ha sempre $A(0) = 0$ quindi 0 è punto stazionario del funzionale Φ_λ, per ogni λ. Possiamo evidentemente supporre che sia $a(0) = 0$ Possiamo anche prendere $\lambda > 0$.

Indichiamo ancora con P_ρ la sfera chiusa di B, con centro nell'origine e raggio ρ, con S_ρ la sua frontiera.

Supponiamo che, per un certo valore λ del parametro, l'origine sia un punto stazionario *isolato* in B per il funzionale Φ_λ. Poniamo

([4]) Notiamo solo che la dimostrazione utilizza, fondamentalmente, la nozione di categoria secondo LUSTERNIK e SCHNIRELMAN.

ora, seguendo ROTHE [20], la seguente ipotesi che diremo ipotesi di non radialità (formulata per il valore λ fissato del parametro).

Ipotesi (NR). Esiste un $\bar{\rho}$ tale che in nessun punto di $(P_{\bar\rho}^- - \{0\}) \cap \{u : \Phi_\lambda(u) = 0\}$ $u - A(u)$ sia parallelo ad u.

Supponiamo dunque che $\bar\rho$ sia anche tale che in $P_{\bar\rho}^-$ non cadano altri punti stazionari di Φ_λ, oltre 0.

Preso ora un $\rho \leq \bar\rho$, introduciamo gli insiemi

$$M_\lambda = \{u : \Phi_\lambda(u) \leq 0\} \cap P_\rho$$

$$T_\lambda = \{u : \Phi_\lambda(u) \leq 0\} \cap S_\rho .$$

Ciò posto, introduciamo con ROTHE i gruppi di omologia singolare relativa: $H_r(M_\lambda, M_\lambda - \{0\})$ e indichiamo con m^r i corrispondenti numeri di BETTI. Analogamente indichiamo con $H_r(T_\lambda)$ il gruppo di omologia r-simo di T_λ e con p^r il corrispondente numero di BETTI.

Possiamo dunque associare al punto stazionario 0, fissato λ, il multi-indice:

$$[m^0, m^1, m^2, \ldots].$$

Con un procedimento di retrazione di $M_\lambda - \{0\}$ su T_λ, reso possibile dalla ipotesi (NR), il ROTHE [20] dimostra (5) che, per ogni $r \geq 2$, si ha

$$H_r(M_\lambda, M_\lambda - \{0\}) \approx H_{r-1}(T_\lambda). \tag{13}$$

Dunque, per ogni $r \geq 2$, si ha

$$m^r = p^{r-1}. \tag{14}$$

Si dimostra poi direttamente la relazione

$$m^1 = p^0 - 1. \tag{15}$$

Teniamo ora presente che il differenziale secondo di Φ_λ calcolato nel punto 0 è la forma bilineare $(v, z) \rightarrow \lambda(v \mid z) - (A'(0)v \mid z) = (\lambda v - A'(0)v \mid z)$. Secondo la terminologia di MORSE il punto stazionario 0 verrà detto *non degenere* se l'operatore $(\lambda I - A'(0))$ è invertibile, cioè, nel nostro caso, se λ non è autovalore per $A'(0)$.

(5) In realtà, la costruzione della retrazione data dal ROTHE contiene un errore (la trasformazione indicata nel Lemma 4.2 di pag. 450 non è continua in generale). Ma gli enunciati possono sussistere, come risulterà dal lavoro [21], di prossima pubblicazione.

Ora, se il punto stazionario 0 non è degenere, il calcolo dei numeri di BETTI (cfr. ROTHE [20]) dà questo risultato:

$$m^r = \delta_r^s \tag{16}$$

essendo δ il simbolo di KRONECKER ed essendo s il numero degli autovalori $> \lambda$ (contati con la loro molteplicità).

Notiamo che si ha in questo caso, per l'indice j di LERAY-SCHAUDER l'espressione:

$$j = (-1)^s = \sum_{r \geq 0} (-1)^r m^r \quad \text{(la verifica è immediata!)}. \tag{17}$$

Le relazioni (14) e (15) sono importanti perchè permettono di classificare il punto stazionario 0 mediante il comportamento del funzionale Φ_λ a distanza dal punto (anche se a distanza non troppo grande).

La relazione (17), poi, dice che, nel caso che 0 sia non degenere il multi-indice introdotto è più fine dell'indice di LERAY-SCHAUDER.

Queste considerazioni permettono di dimostrare l'esistenza di un punto di diramazione con un ragionamento che imita quello del § 2. Supponiamo infatti che un punto $\lambda_0 > 0$ sia autovalore (isolato) per $A'(0)$. Supponiamo, per assurdo, che λ_0 non sia punto di diramazione per A: allora esisterà un intorno di $(\lambda_0, 0)$ in $\boldsymbol{R} \times B$ dove non cadono altri punti stazionari per il funzionale Φ_λ, oltre i punti $(\lambda, 0)$. Come conseguenza, si dimostra (vd. [21]) l'esistenza di un intervallo $[\lambda_1, \lambda_2]$ contenente λ_0 nel suo interno. e di un numero positivo $\bar{\rho}$, tali che l'ipotesi (NR) valga per ogni $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ nella sfera di raggio $\bar{\rho}$, $P_{\bar{\rho}}^-$. Si può inoltre supporre, evidentemente, che λ_1 e λ_2 non siano autovalori per $A'(0)$. Preso un qualsiasi ρ, con $\rho \leq \bar{\rho}$, si può dimostrare che gli insiemi $T_{\lambda_1} = \{u : \Phi_{\lambda_1}(u) \leq 0\} \cap S_\rho$ e $T_{\lambda_2} = \{u : \Phi_{\lambda_2}(u) \leq 0\} \cap S_\rho$ sono omeomorfi. Ma questo è assurdo perchè, se fra λ_1 e λ_2 c'è un autovalore. i multi-indici di Φ_{λ_2} e Φ_{λ_2} sono diversi, come risulta dalla formula (16).

Si ritrova così il teorema di KRASNOSEL'SKII, con qualche differenza d'ipotesi riguardo alla regolarità (abbiamo bisogno, per applicare i procedimenti tipici della teoria di MORSE, di sapere che Φ_λ è differenziabile due volte con continuità, cioè che A è differenziabile con continuità).

La teoria dell'elasticità presenta molti problemi non lineari di tipo variazionale, che si possono trattare con i metodi qui esposti. Per dare un esempio tipico, segnaliamo il seguente problema studiato da M. S. BERGER [22], che si trova nella teoria delle piastre elastiche a regime ipercritico.

È dato, nell'aperto limitato, regolare $\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$, il sistema, nelle incognite u ed f:

$$(18) \qquad \begin{cases} \Delta^2 f = -\lambda[u, u] \\ \Delta^2 u = \lambda[F, u] + [f, u] \end{cases}$$

dove è $[f, g] = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}$, ed F è una funzione regolare assegnata. Le condizioni al contorno sono:

$$u = 0, \quad u_\nu = 0, \quad f = 0, \quad f_\nu = 0$$

(con u_ν ed f_ν indichiamo le rispettive derivate normali).

Conviene ambientare il problema nello spazio W_0^2 delle funzioni che hanno derivate fino al secondo ordine a quadrato sommabile e che si annullano su $\partial\Omega$ con le loro derivate prime. Si può osservare che queste funzioni sono continue in $\overline{\Omega}$.

Introduciamo l'operatore di GREEN per l'operatore biarmonico Δ^2, con le condizioni al contorno prescritte. Ricavando f dalla prima equazione, si ottiene l'equazione:

$$u = \lambda\{G([F, u]) - G([G[u, u], u])\} = \lambda S(u)$$

Si riconosce facilmente che S è compatto e che è un operatore variazionale $\left(\text{per questo è importante notare che la forma } \int_\Omega [f.[g, h]]\Phi dx\right.$ è simmetrica rispetto ad f, g, h, $\left.\Phi\right)$.

Il problema della diramazione è allora subito risolto con il teorema di KRASNOSEL'SKII: per $\lambda > 0$ i punti di diramazione sono tutti e soli i valori singolari (cioè i reciproci degli autovalori) dell'operatore lineare $S'(0)$ (differenziale di FRÉCHET di S nel punto 0), cioè dell'operatore $v \to G([F, v])$ [6]. In questo caso rimane dunque giustificata la linearizzazione, cioè la riduzione del problema allo studio degli autovalori del problema:

$$\Delta^2 v = \lambda[F, v], \qquad \text{con } v = v_\nu = 0 \qquad \text{su } \partial\Omega.$$

4 - Conclusioni.

Vi sono altre classi di operatori compatti per cui la ricerca dei punti di diramazione può essere fatta con procedimenti specia-

[6] Il BERGER arriva a dimostrare l'esistenza delle biforcazioni utilizzando il principio di LUSTERNIK e SCHNIRELMAN. Nel caso di un autovalore di molteplicità due, arriva ad affermare l'esistenza di almeno due rami di soluzioni non nulle.

li, analogamente a quello che si è visto per gli operatori variazionali. Citiamo gli operatori che lasciano invariato un cono in uno spazio di BANACH; per questi rinviamo alla monografia [2].

Ma nell'analisi si presentano altri problemi di diramazione che sono ancora più lontani dal quadro che abbiamo tracciato. Citiamo tra questi un importante problema risolto recentemente da P. K. RABINOWITZ [26]. Si tratta della ricerca delle soluzioni periodiche con periodo 2π dell'equazione delle onde perturbata:

$$u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon F(x, t, u) = 0 \tag{19}$$

essendo ε un parametro reale ed essendo F una funzione sufficientemente regolare, periodica con periodo 2π rispetto a t. Le condizioni al contorno imposte sono: $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. È evidente allora che per $\varepsilon = 0$ vi sono infinite soluzioni, che compongono una varietà lineare N nello spazio di HILBERT H delle funzioni periodiche con periodo 2π rispetto a t e a quadrato sommabile in ogni campo di periodicità. Per indagare se vi siano soluzioni per $\varepsilon \neq 0$, RABINOWITZ imposta un problema di diramazione in questo senso: assunta N come varietà dei parametri, si tratta di trovare in N un punto di diramazione, cioè un punto u_0 tale che in ogni intorno di $(0, u_0)$ in $\boldsymbol{R} \times H$ cada almeno una soluzione (ε, u) della (19), con $\varepsilon \neq 0$. L'equazione di diramazione prende la forma

$$(F(x, t, u_0) \mid w) = 0 \qquad \forall\, w \in N. \tag{20}$$

Si dimostra che, nell'ipotesi $\dfrac{\partial F}{\partial u} \geq h > 0$ (h costante) questa ha un'unica soluzione, a cui corrisponde un unico ramo di soluzioni della (19), per ε abbastanza piccolo.

* * *

Concludendo, possiamo notare che, mentre vi sono problemi di diramazione nuovi e non ancora sistemati in una teoria, vi sono problemi tipici ormai ben classificati per cui si dispone di numerosi criteri. Questi criteri, peraltro, si fondono prevalentemente sull'esistenza di autovalori per certi operatori lineari, sulla determinazione della loro molteplicità, ecc.; in generale, dunque, si approda a problemi assai ardui, specialmente quando non si tratti di operatori simmetrici. Non sono molte le classi di operatori per cui si conoscono criteri generali di esistenza di autovalori reali. Sembra interessante, inoltre, poter disporre di criteri che permettano di affermare che, per un operatore dipendente da parametri, nel caso «generico» (inteso in un certo senso), gli autovalori sono tutti semplici.

BIBLIOGRAFIA

(I lavori [1], [2], [3], [4] contengono ampie informazioni bibliografiche)

[1] M. A. KRASNOSEL'SKII, *Su alcuni problemi di analisi non lineare*. Usp. Mat. Nauk **9** (1954) (in russo). Traduzione inglese: Amer. Math. Soc. Translations Ser. 2, vol. 10.

[2] — —, *Metodi topologici nella teoria delle equazioni integrali non lineari*, (in russo). (Gostekhteoretizdat, Mosca, 1956. Trad. inglese: Pergamon Press 1964).

[3] M. M. VAINBERG, *Metodi variazionali nello studio degli operatori non lineari*, (in russo) (Gostekhizdat, Mosca 1956. Trad. inglese: Holden Day 1964).

[4] M. M. VAINBERG e V. A. TRENOGIN, *I metodi di Lyapunov e Schmidt nella teoria delle equazioni lineari e loro ulteriori sviluppi*, (in russo). Usp. Mat. Nauk 17, 13-75 (1962). Trad. inglese: Russian Math. Surveys.

[5] E. SCHMIDT, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, 3 Teil. Math. Ann. **65**, 370-399 (1908).

[6] A. M. LYAPUNOV, *Sur les figures d'équilibre peu différents des ellipsoides d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation*. Zap. Akad. Nauk St. Petersburg 1-225(1906).

[7] A. J. NEKRASOV, *Onde di tipo stazionario*. Izv. Ivanovo-Voznesensk politekhn. inst. 6, 155-171 (1922).

[8] L. LICHTENSTEIN, *Vorlesungen über einige Klassen nicht linearen Integralgleichungen*. Berlin 1931.

[9] A. HAMMERSTEIN, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*. Acta Math. **54**, 117-176 (1930).

[10] J. LERAY et J. SCHAUDER, *Topologie et équations fonctionnelles*. Annales Sc. de l'École Normale Supérieure (3) **51** (1934).

[11] C. MIRANDA, *Problemi di esistenza in analisi funzionale*. Scuola Normale Sup. Pisa (1949).

[12] J. SCHWARZ, *Nonlinear functional analysis*. New York Univ. (1963).

[13] W. VELTE, *Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationären Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen*. Arch. Rat. Mech. Anal. **16**. 97-125 (1964).

[14] — —, *Stabilität und Verzweigung stationären Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylorproblem*. Arch. Rat. Mech. Anal. **22**, 1-14 (1966).

[15] A. MARINO, *Su un problema di diramazione riguardante i moti convettivi di un fluido viscoso*. Rend. Sem Mat. Univ. Padova, **38**, 199-226 (1967).

[16] LIN, *The theory of Hydrodynamic stability*. Cambridge Univ. Press, 1955.

[17] J. SCHWARZ, *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points*. Comm. Pure Appl. Math. XVII, 307-315 (1964).

[18] F. BROWDER, *Infinite dimensional manifolds and nonlinear elliptic eigenvalue problems*. Annals of Math., **82**, 459-477 (1965).

[19] E. H. ROTHE, *Critical points and gradient fields of scalars in Hilbert space*. Acta Mathematica **85**, 73-98 (1951).

[20] E. H. ROTHE, *Leray - Schauder index and Morse type numbers in Hilbert space*. Annals of Math. **55**, 433-467 (1952).

[21] A. MARINO e G. PRODI, Nota di prossima pubblicazione sui «Rendiconti del Seminario Matematico di Padova».

[22] M. S. BERGER, *An application of the calculus of variations in the large to the equations of nonlinear elasticity*. Bulletin of the A. M. S. **73**, 520-525 (1967).

[23] R. G. BARTLE, *Singular points of functional equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 366-384 (1953).

[24] J. CRONIN, *Branch points of solutions of equations in Banach spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., **69**, 208-231 (1950).

[25] J. SCHWARZ, *Compact Analytic Mappings of B-Spaces and a theorem of Jane Cronin*. Comm. Pure Appl. Math. **XVI**. 253-260 (1963).

[26] P. H. RABINOWITZ, *Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations*. Comm. Pure Appl. Math. **20**, 145-205 (1967).