Bollettino Unione Matematica Italiana

G. Vranceanu

Varietà differenziabili e trasformazioni puntuali. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 350–356.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_350_0>

Varietà differenziabili e trasformazioni puntuali.

G. VRANCEANU (Bucarest) [1]

NOTA I

Sunto. - *Si associa ad una varietà differenziabile una trasformazione puntuale dello spazio euclideo e se ne fanno varie applicazioni.*

Lo studio delle varietà differenziabili è cominciato quasi un secolo fa con i lavori di BETTI [2] e di POINCARÉ [3].

In questi lavori la varietà differenziabile V_n è definita come un luogo geometrico a n dimensioni di uno spazio euclideo E_N $(N \geq n)$. Dunque indicando con $y^1, \dots, y^N$ coordinate dello spazio E_N, la varietà V_n è definita da un numero di $N - n$ equazioni

$$f_\alpha(y^1, \dots, y^N) = 0 \qquad (\alpha = n + 1, \dots, N) \tag{1}$$

e da un certo numero di inequazioni

$$\varphi_s(y^1, \dots, y^N) > 0. \tag{2}$$

Tanto le f quanto le φ si suppongono funzioni continue e derivabili fino ad un certo ordine.

Si vede che se una o più delle funzioni φ sono uguali a zero si hanno delle varietà V_m con $m < n$, associate a V_n che si chiamano le frontiere di V_n.

1. Trasformazioni puntuali e metrica euclidea associate a V_n.

Osserviamo che prendendo una soluzione parametrica delle equazioni (1)

$$y^a = f^a(x^1, \dots, x^n), \qquad (a = 1, \dots, N) \tag{3}$$

(1) Questo lavoro rappresenta una parte delle questioni esposte in cinque conferenze fatte all'Università di Bologna in aprile e maggio 1967.

(2) ENRICO BETTI, *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni*, «Annali di Mat.», t. 4, 1872.

(3) HENRI POINCARÉ, *Analysis Situs*, «Journal de l'Ecole Polytechnique», 1895, p. 1-125.

si ha una certa regione U della varietà V_n, le $x^1, \dots, x^n$ essendo delle coordinate o parametri di V_n nella regione U. Si può sempre supporre che U sia quello che si chiama un intorno, dunque una regione i cui punti sono in corrispondenza biunivoca e bicontinua coi punti interni ad una sfera dello spazio a n dimensioni, o ad un cubo.

Ne risulta che una varietà differenziabile V_n si può definire come l'insieme di un certo numero finito o di un'infinità numerabile di intorni ad n dimensioni.

Prendendo questa proprietà come definizione, si può mostrare che la varietà può essere immersa in uno spazio euclideo ad un numero sufficientemente grande di dimensioni. Anzi un teorema di WHITNEY ci dice che N può essere al più $2n$ ([4]).

Ne risulta così che una varietà differenziabile è uno spazio di RIEMANN avendo come metrica quella indotta dallo spazio euclideo E_N. Infatti la metrica di E_N è data dalla formula

$$d\sigma^2 = (dy^1)^2 + \dots + (dy^N)^2. \tag{4}$$

Ora se teniamo conto delle formule (3) questa diventa per l'intorno U

$$ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j, \qquad a_{ij} = \frac{\partial f^a}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f^a}{\partial x^j} \tag{4'}$$

che si chiama anche la prima forma fondamentale della varietà V_n. Ne risulta altresì che su una varietà differenziabile si può definire in una infinità di modi una funzione f. Basta per esempio prendere

$$f = (y^1 - c^1)^2 + \dots + (y^N - c^N)^2, \tag{5}$$

dove $C(c^1, \dots, c^N)$ è un punto fisso di E_N e dove $y^1, \dots, y^N$ sono le coordinate di un punto P della varietà V_n.

Ora se la varietà V_n è chiusa la funzione f realizza il suo massimo o minimo in V_n. Perciò se possiamo mostrare che una funzione f non realizza per esempio il suo massimo, questo significa che la varietà non è chiusa.

Osserviamo adesso che ad una varietà V_n si può associare in una infinità di modi una trasformazione puntuale in E_N.

Infatti supponiamo di essere nell'intorno U, dove hanno dunque luogo le formule (3). Prendendo come variabili $x^{n+1}, \dots, x^N$ i primi

([4]) H. WHITNEY, «Annals of Math.», 37, 1936, p. 865.

membri delle formule (1), ne risulta che dobbiamo avere delle formule della forma

$$y^a = f^a(x^1, \ldots, x^n) + \psi^a(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^N) \tag{5'}$$

dove le ψ^a si annullano con $x^{n+1}, \ldots, x^N$. Ora le formule (5') ci danno una trasformazione puntuale in E_N, che nell'intorno U di V_n fa passare dalle variabili $x^1, \ldots, x^n$ e $x^{n+1}, \ldots, x^N$ che sono delle coordinate curvilinee in E_N, alle coordinate cartesiane ortogonali $y^1, \ldots, y^N$.

In una nota lincea pubblicata nel 1930 ([5]) ho mostrato come si possono prendere le funzioni ψ^a delle formule (5') lineari ed omogenee in $x^{n+1}, \ldots, x^N$.

Infatti prendendo un punto $P(x^1, \ldots, x^n)$ dell'intorno U di V_n possiamo considerare in P un sistema di $N-n$ vettori normali a V_n in E_N. Indicando con Y^a_α le componenti di tali vettori ne risulta che Y^a_α sono funzioni del punto P dunque di $x^1, \ldots, x^n$; possiamo supporre che le Y^a_α soddisfino le condizioni

$$Y^a_\alpha Y^a_\beta = \delta^\alpha_\beta \qquad (\alpha, \beta = n+1, \ldots, N) \tag{6}$$

che ci dicono che i vettori Y^a_α sono unitari e ortogonali tra loro. Poichè essi sono normali a V_n in P, ne risultano altresì le condizioni

$$Y^a_\alpha \frac{\partial f^a}{\partial x^k} = 0. \tag{6'}$$

Ora se noi consideriamo come formule (5') le formule

$$y^a = f^a(x^1, \ldots, x^n) + x^\alpha Y^a_\alpha, \tag{7}$$

abbiamo una trasformazione puntuale nell'intorno U. Infatti il determinante funzionale della trasformazione (7) per $x^\alpha = 0$ si scrive

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} \cdots \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} & Y^1_{n+1} \cdots Y^1_N \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial y^N}{\partial x^1} \cdots \dfrac{\partial y^N}{\partial x^n} & Y^N_{n+1} \cdots Y^N_N \end{vmatrix}$$

([5]) G. Vranceanu, *Sulle condizioni di rigidità di una V_m in un S_n*, « Rend. Lincei », Vol. XI, 1930, p. 375-389.

e quindi il quadrato di $\mathfrak{D}$ si scrive

$$\mathfrak{D}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} 0 \dots 0 \\ 0 \dots\dots 0 \quad 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \dots\dots\dots 0 \dots 1 \end{vmatrix} = a$$

dove le a_{ij} sono date dalle formule (4').

Ne risulta dunque

$$\mathfrak{D}^2 = a$$

dove $a = |a_{ij}|$ è il determinante della prima forma fondamentale di V_n, che è evidentemente positivo e diverso da zero.

Abbiamo perciò il teorema:

Le formule (7) *definiscono una trasformazione puntuale valevole in una regione di E_N che contiene l'intorno U di V_n.*

È interessante trovare la metrica di E_N nelle variabili di questa trasformazione, variabili che sono in generale coordinate curvilinee in E_N. Ora differenziando le (7) si ha

$$dy^a = df^a + x^\alpha dY^a_\alpha + Y^a_\alpha dx^\alpha \tag{6''}$$

cosicchè introducendo nella formula (4) si ottiene, tenendo conto di (4') e delle formule (6) e (6')

$$d\sigma^2 = ds^2 + 2x^\alpha \varphi_\alpha + 2x^\alpha dx^\beta \psi_{\alpha\beta} + x^\alpha x^\beta \varphi_{\alpha\beta} + (dx^\alpha)^2 \tag{8}$$

dove abbiamo posto

$$\varphi_\alpha = dy^a dY^a_\alpha, \qquad \psi_{\alpha\beta} = dY^a_\alpha Y^a_\beta, \qquad \varphi_{\alpha\beta} = dY^a_\alpha dY^a_\beta. \tag{8'}$$

Come si vede le φ_α sono forme quadratiche in dx^i e possiamo scrivere

$$\varphi_\alpha = b_{\alpha ij} dx^i dx^j \tag{9}$$

e sono quelle che si chiamano seconde forme fondamentali di V_n.

Le $\psi_{\alpha\beta}$ sono forme lineari nelle dx^i e possiamo scrivere

$$\psi_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta i} dx^i \qquad (a_{\alpha\beta i} + a_{\beta\alpha i} = 0). \tag{9'}$$

Esse sono le torsioni.

Quanto alle $\varphi_{\alpha\beta}$ che sono anche esse forme quadratiche e che possiamo scrivere

$$\varphi_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta ij} dx^i dx^j$$

si può mostrare che si esprimono algebricamente per mezzo delle φ_α e delle $\psi_{\alpha\beta}$.

Infatti le prime due formule (8′) ci danno

$$dY^a_\alpha = a^{ir}\varphi_{\alpha i}\frac{\partial f^a}{\partial x^r} + \psi_{\alpha\lambda}Y^a_\lambda \qquad (\varphi_{\alpha i} = b_{\alpha ij}x^i x^j) \tag{9''}$$

e perciò ne risulta

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha i}\varphi_{\beta j}a^{ij} + \psi_{\alpha\lambda}\psi_{\beta\lambda}. \tag{9'''}$$

Abbiamo dunque il teorema:

La metrica dello spazio euclideo E_N nell'intorno della varietà V_n è data dalla formula (8) *ed è completamente definita dalla prima forma fondamentale, dalle seconde forme fondamentali e dalle torsioni.*

Possiamo osservare che questa metrica è di secondo grado nelle variabili ausiliari x^α e che se le torsioni $\psi_{\alpha\beta}$ sono nulle, le coordinate x^i sono ortogonali alle x^α.

Osserviamo altresì che le formule (6″) si scrivono, se si tiene conto delle (9″),

$$dy^a = df^a + x^\alpha a^{ir}\varphi_{\alpha i}\frac{\partial f^a}{\partial x^r} + Y^a_\alpha(dx^\alpha + x^\lambda\psi_{\lambda\alpha})$$

cosicchè la metrica (8) si può scrivere anche nella forma

$$d\sigma^2 = ds^2 + 2x^\alpha\varphi_\alpha + x^\alpha x^\beta\varphi_{\alpha i}\varphi_{\beta j}a^{ij} + \sum_{n-1}^{N}{}_\alpha\,(dx^\alpha + x^\lambda\psi_{\lambda\alpha})^2 \tag{10}$$

fatto che realizza una separazione in due parti, la prima contenente solamente la prima e le seconde forme fondamentali e la seconda parte contenente solamente le torsioni.

Supponiamo adesso di avere come varietà differenziabile una curva C nello spazio euclideo $E_3(x, y, z)$, definita dalle formule

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s), \qquad z = \psi(s)$$

dove s è l'arco della curva. Possiamo prendere allora come trasformazione puntuale (7) associata alla curva, la trasformazione

$$x = f(s) + u\alpha' + v\alpha''$$

$$y = \varphi(s) + u\beta' + v\beta''$$

$$z = \psi(s) + u\gamma' + v\gamma''$$

dove $n(\alpha', \beta', \gamma')$ e $b(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ sono i vettori unitari della normale principale e della binormale alla curva C in un punto $P(s)$. Differenziando si ha

$$dx = \alpha ds + \alpha' du + \alpha'' dv + u d\alpha' + v d\alpha''$$

$$dy = \beta ds + \beta' du + \beta'' dv + u d\beta' + v d\beta''$$

$$dz = \gamma ds + \gamma' du + \gamma'' dv + u d\gamma' + v d\gamma''$$

dove $t(\alpha, \beta, \gamma)$ è il vettore unitario della tangente in P alla curva C. Tenendo conto delle formule di FRENET si ha

$$dx = \alpha\left(1 - \frac{u}{R}\right) ds + \alpha'\left(du + \frac{v}{T} ds\right) + \alpha''\left(dv - \frac{u}{T} ds\right)$$

dove R è il raggio di curvatura e T il raggio di torsione di C. Abbiamo formule analoghe per dy, dz, cosicchè la metrica di E_3 in coordinate curvilinee s, u, v si scrive

$$d\sigma^2 = \left(1 - \frac{u}{R}\right)^2 ds^2 + \left(du + \frac{v}{T} ds\right)^2 + \left(dv - \frac{u}{T} ds\right)^2. \tag{10'}$$

Si vede che questa metrica è regolare per $u < R$, cioè in una regione dello spazio E_3 che non contiene i centri di curvatura della curva C. Ne risulta altresì che la forma lineare ψ_{23} si scrive

$$\psi_{23} = \alpha' d\alpha'' + \beta' d\beta'' + \gamma' d\gamma'' = \frac{ds}{T}$$

ciò che giustifica il nome di torsioni dato alle forme $\psi_{\alpha\beta}$.

Diremo che una varietà V_n immersa in uno spazio E_N è senza torsioni, se le forme $\psi_{\alpha\beta}$ sono nulle, cosa che si ha evidentemente se $N = n + 1$. Come esempio di una immersione senza torsioni nel caso in cui $N > n + 1$ abbiamo il caso del toro T_n definito come prodotto diretto di n cerchi $C_1, \dots, C_n$, ossia da n angoli $\theta_1, \dots, \theta_n$.

Se consideriamo come immersione di T_n in E_{2n} l'immersione ben nota

$$y^{2i-1} = \cos\theta_i, \qquad y^{2i} = \sin\theta_i$$

possiamo prendere come trasformazione puntuale (7), la seguente

$$y^{2i-1} = \cos\theta_i\,(1 + t_i), \qquad y^{2i} = \sin\theta_i\,(1 + t_i) \tag{10''}$$

e la metrica di E_{2n} nelle coordinate θ_i, t_i si scrive

$$d\sigma^2 = d\theta_1^2(1 + t_1)^2 + \dots + d\theta_n^2(1 + t_n)^2 + dt_1^2 + \dots + dt_n^2 \tag{10'''}$$

ciò che ci dice che tutte le torsioni $\psi_{\alpha\beta}$ sono nulle.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
l'8 maggio 1967