Bollettino Unione Matematica Italiana

P. Krée

Propriétés de continuité dans L^p de certains noyaux.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 330–344.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_330_0>

Propriétés de continuité dans L^p de certains noyaux

P. Krée

Résumé. - *Nous enonçons quelques compléments et quelques précisions relativement à nos articles* [21] *et* [22],

Les principaux complèments sont les suivants.

— *Résultat négatif* (!!) *sur le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.*

— *Résultat sur les espaces L^p avec poids* (*annoncé en note à la fin de* [22].

— *Résultat sur les normes mixtes de Benedek Panzone* (*introduites dans* [3]).

Nous avons aussi essayé de donner une vue panoramique de la théorie et nous complétons la bibliographie de [21] *et* [22].

§ 1. - **Définitions.**

Considérons trois espaces de Banach complexes $B_j(j = 1, 2, 3)$ et une application bilinéaire continue

$$B_1 \times B_2 \to B_3 \tag{1}$$
$$(b_1, b_2) \to b_1 \times b_2 .$$

On considère deux variétés réelles positives $C^\infty \Omega_2$ et Ω_3 et munies de mesures positives dx et dy. On considère un noyau

$$\overrightarrow{K(x, y)} \in \mathfrak{D}'_{xy} \widehat{\otimes} B_1 \tag{2}$$

et pour toute $\vec{\varphi} \in \mathfrak{D}_y \otimes B_2$ on pose

$$\tilde{\varphi} = (K)\varphi \quad \text{avec} \quad \tilde{\varphi}(x) = \int_{\Omega_2} \overrightarrow{K(x, y)} \times \overrightarrow{\varphi(y)} dy \tag{3}$$

($\tilde{\varphi}$) est une distribution à valeurs dans B_3).

L'espace de LEBESGUE $L_x^p(B_3)$ est défini comme l'ensemble (des classes d'équivalence de) fonctions fortement mesurables $\Omega_3 \xrightarrow{f} B_3$ telles que

$$\| f \|_p = \left(\int | f(x) |^p dx \right)^{1/p} < \infty .$$

On se demande sous quelles conditions l'opérateur $K: \varphi \to \tilde{\varphi}$ définit par prolongement continu un opérateur continu

$$L_y^{p_2}(B_2) \to L_x^{p_3}(B_3). \tag{4}$$

Dans la référence [21] on trouvera de nombreux exemples de tels opérateurs où les espaces B_j sont des espaces de BANACH de dimension infini mais avec $\Omega_2 = \Omega_3$.

Dans la théorie des problèmes aux limites elliptiques (dans un ouvert Ω de $\boldsymbol{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$) il intervient des exemples avec $\Omega_2 = \partial\Omega$ et $\Omega_3 = \Omega$ (et vice versa). En effet: P étant elliptique ou parabolique d'ordre m, u étant dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ posons $\gamma u = (\gamma_0 u, \dots \gamma_{m-1} u)$ où $\gamma_j u$ est la dérivée normale de u, d'ordre j.

Cherchons à résoudre le problème

$$\left| \begin{array}{l} Pu = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \vec{B}(\gamma u) = \vec{g} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right. \tag{5}$$

où $\vec{B}$ est une famille d'opérateurs sur le bord $\partial\Omega$.

Prolongeons f par $\tilde{f}$ dans $\mathfrak{D}(\boldsymbol{R}^n)$ et E étant un *vrai* inverse à gauche de P posons $u_1 = E\tilde{f}$ et $\vec{B}(\overrightarrow{\gamma u_1}) = \vec{g}_1$.

(5) est donc équivalent à

$$\left| \begin{array}{l} Pu_2 = 0 \\ \vec{B}(\overrightarrow{\gamma u_2}) = \overrightarrow{g - g_1} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} P(u_1) = f \\ \vec{B}(\overrightarrow{\gamma u_1}) = \vec{g}_1 \end{array} \right. . \tag{6}$$

On peut donc supposer $f = 0$ dans (5).

Désignons par u^0 la distribution sur $\boldsymbol{R}^n$ définie par la fonction valant $u(x)$ si $x \in \Omega$ et 0 sinon.

La formule de GREEN s'écrit:

$$P(u^0) = (P(u))^0 + Q(\gamma u)$$

où $Q(\gamma u)$ est une somme de multi-couches étendues sur $\partial\Omega$.

Comme $(P(u))^0 = 0$ on a $P(u^0) = Q(\gamma u)$. En appliquant E à chaque membre on obtient $u^0 = EQ(\gamma u)$. En prenant les traces des dérivées normales de chaque membre sur $\partial\Omega$ on obtient que les traces

$v_0 .. v_{m-1}$ des dérivées normales de la solution vérifient (en posant $C = \gamma EQ$)

$$(7) \qquad \left| \begin{array}{l} B(v) = g \\ C(v) = v \end{array} \right. \qquad \text{avec} \quad v = (v_0 \dots v_{m-1}).$$

C'est la formulation moderne d'une méthode connue depuis longtemps. Le problème (5) est résolu si l'on résout un système sur le bord $\partial\Omega$. Les opérateurs $\gamma u \to u^{\prime\prime}$ et $v \to Cv$ sont du type indiqué.

Dans la théorie usuelle des problèmes aux limites à l'aide des opérateurs pseudo différentiels, on ne prend pas un vrai inverse E, mais un pseudo inverse. L'operateur C correspondant a été étudié par CALDERON-ZYGMUND, HÖRMANDER, SEELEY ....

Revenant aux opérateurs (3), on peut distinguer le cas où K est définie par une fonction $K(x, y)$ localement sommable et le cas contraire (on dit alors que K est singulier).

§ 2. – Théorèmes généraux.

THÉORÈME 1 (de convergence).

(8) *Supposons qu'une famille $(K_n)_n$ de noyaux est telle que*

$$K_n \to K \quad \text{dans} \quad \mathfrak{D}'_{xy} \otimes B_1 \quad \text{faible.}$$

Supposons que les normes des opérateurs

$$L^{p_2}_y(B_2) \to L^{p_3}_x(B_3)$$

associés aux noyaux K_n soient uniformément bornées

$$| < K_n\varphi, \psi > | = | < K_n, \varphi \otimes \psi > | \leq C |\varphi|_{p_2} \cdot |\psi|_{p'_3}$$

pour φ (resp ψ) dans $\mathfrak{D}(\Omega_2) \otimes B_2$ (resp. $\mathfrak{D}(\Omega_3) \otimes B_3$).

En passant à la limite, on voit que K définit un opérateur du même type que les noyaux K_n.

Ce raisonnement suppose que le dual de $L^{p_3}(B_3)$ est $L^{p'_3}(B'_3)$, soit $1 < p_3 < \infty$ et B_3 séparable.

EXEMPLE 1.

Sur $\boldsymbol{R}_x$ considérons pour tout entier n

$$k_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| \geq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les opérateurs $(k_n *)$ forment pour tout p un ensemble borné d'opérateurs dans $L^p(1 < p < \infty)$

EXEMPLE 2.

Sur un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$ un opérateur de CALDERON ZYGMUND s'écrit (voir [8] et [29])

$$\varphi \xrightarrow{K} \tilde{\varphi} \quad \text{avec} \quad \tilde{\varphi}(x) = \text{v.p.} \int K(x, y)\varphi(y)dy.$$

Pour construire un calcul symbolique relatif à ces opérateurs, CALDERON et ZYGMUND utilisent une décomposition en harmoniques sphériques et écrivent

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cdot)(\beta_k *)$$

$(\alpha_k \cdot) =$ opérateur de multiplication

$(\beta_k *) =$ opérateur de convolution.

La série est convergente dans $\mathfrak{D}'_{xy}$ et les normes des opérateurs

$$\sum_{k=1}^{N} (\alpha_k \cdot)(\beta_k *)$$

étant uniformément bornées dans L^p.

Continuité des transformations intégrales non singulières.

Les théorèmes prouvant la continuité de telles transformations géneralisent le lemme de SOBOLEV; sur $\boldsymbol{R}^n_x$, la convolution par $|x|^{-\frac{n}{a}}$ définit un opérateur continu $L^p \to L^q$ $\left(a, p \text{ et } q > 1, q \geq p \text{ et } \frac{1}{a} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{q}\right)$. Le théorème d'O. Neil ([33]) a été redémontré plus simplement par différents auteurs (LIONS, PEETRE, TORCHINSKY: non publié).

Voici une généralisation simultanée du théorème d'O. NEIL et de l'inégalité de KANTOROVITCH (voir [25]).

THÉORÈME 2.

Un opérateur non singulier (3) *définit par prolongement continu une application bilinéaire continue.*

(9)
$$\boxed{\begin{array}{l} L^{\infty}_y(L^{p_0\infty}_x) \cap L^{\infty}_x(L^{p_1\infty}_y) \times \tilde{L}^{qs}_y \to L^{rs}_x \\ p_i \in]0, +\infty[, \ s \in]0, +\infty[\ 1 < q < r \\ \text{avec} \quad \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{p_0}{p_1}\dfrac{1}{r}. \end{array}}$$

N.B. Dire que $K(x, y) \in L_y^{\infty}(L_x^{p_0\infty})$ c'est dire que

$$\sup_y \| K(\cdot\,, y) \|_{p_0,\infty} < \infty$$

$\tilde{L}_y^{qs}$ désigne le sous espace de L_y^{qs} formé par les fonctions étagées. Dans le cas des opérateurs de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$, (9) entraine que

$$(10) \qquad \boxed{\begin{array}{l} L^{p\infty} * L^{qs} \to L^{rs} \quad \text{si} \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r} \\ \text{(c'est le théorème de O. Neil).} \end{array}}$$

Le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

Nous allons voir qu'il n'existe pas une généralisation vectorielle du théorème de MARCINKIEWICZ analogue à la généralisation vectorielle du théorème de RIESZ donnée dans [26] (On utilise les notations de [26]).

(11) REMARQUE.

(12) *Il existe un espace X muni d'une mesure $dx \geq 0$ et un couple d'interpolation (B_i); tels que quels que soient $\theta \in]0, 1[$, $s \geq 1$, $p_i \geq 1$ on a:* $\boxed{L_x^{p_0\infty}(B_0) \cap L_x^{p_1\infty}(B_1) \not\subset L^{p_\theta}(B_0 B_1)_{\theta s})}$

$$\left(\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right).$$

(13) CONSÉQUENCES.

1. – Quel que soit l'espace mesuré Z (non vide !), quel que soit le couple d'espaces de LEBESGUE $(L_z^{r_i})_i$ $(r_i \geq 1)$ on peut trouver T linéaire telle que:

$$L_z^{r_0} + L_z^{r_1} \to L_x^{p_0\infty}(B_0) + L_x^{p_1\infty}(B_1)$$

(a) T soit de « type faible $\left[\dfrac{1}{r_i}, \dfrac{1}{p_i}(B_i)\right]$ » c'est-à-dire que T définit par restriction des applications continues:

$$(14) \qquad L_z^{r_i} \to L_x^{p_i\infty}(B_i)$$

b) Pour tout $\theta \in]0, 1[$, et tout $s \geq 1$ T ne soit jamais de « type fort $\left[\dfrac{1}{r_\theta}, \dfrac{1}{p_\theta}((B_0, B_1)_{\theta s})\right]'$ c'est-à-dire que T ne définit pas par restriction une application continue

$$L_z^{r_\theta} \to L_x^{p_\theta}((B_0, B_1)_{\theta s})$$

(car pour tout $g \in L_x^{p_0\infty}(B_0) \cap L_x^{p_1\infty}(B_1)$ et toute $f \in L_z^{r_0} \cap L_z^{r_1}$ on peut trouver T telle que (14) et $Tf = g$).

2. – Quels que soient r et $s \geq 1$, pour l'espace X et le couple B_i de la remarque 1, on a

$$(15) \qquad (L_x^{p_0\infty}(B_0),\ L_x^{p_1\infty}(B_1)_{\theta r}) \not\subset L^{p_\theta}((B_0, B_1)_{\theta s}).$$

(Car quel que soit le couple d'interpolation $(C_i)_i$, tout espace de moyenne construit sur ce couple contient $C_0 \cap C_1$).

Preuve de la remarque 1:

Prendre $X = Y = \boldsymbol{R}^+$ muni de la mesure de LEBESGUE

$$B_0 = L_y^{p_0\infty} \qquad B_1 = L_y^{p_1\infty}.$$

D'après (26) on a $(B^0, B_1)_{\theta s} = L_y^{p_\theta s}$.

Il faut voir que

$$L_x^{p_0\infty}(L_y^{p_0\infty}) \cap L_x^{p_1\infty}(L_y^{p_1\infty}) \not\subset L_x^{p_\theta}(L_y^{p_\theta\infty}).$$

Il suffit de prendre $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq y \leq \dfrac{1}{x} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\| f(x, \cdot) \|_{L_y^{p\infty}} = \sup_t t^{1/p}(f(x, \cdot)^*(t) = x^{-1/p}$$

$$\| x \to f(x, \cdot) \|_{L^p(L_y^{p\infty})} = \left(\int_0^\infty (x^{-1/p})^p dx \right)^{1/p} = \infty$$

et

$$\| x \to f(x, \cdot) \|_{L_x^{p\infty}(L_y^{p\infty})} = \sup_x x^{1/p} x^{-1/p} = 1$$

(16) REMARQUE 2.

Si l'on a un couple d'interpolation B_i d'éspaces de Banach, un espace mesuré X et quatre nombres p_i et $q_i \geq 1$, posons pour tout $\theta \in 0$,

$$\frac{1}{p_\theta} + \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

$$D = L^{p_0 q_0}(B_0) \qquad E = L^{p_1 q_1}(B_1) \qquad F = L^{p_\theta q_\theta}((B_0, B_1)_{\theta s}).$$

Alors on a pour tout $s \geq 1$

(17) $$(D,\ E)_{\theta s} \rightarrow F.$$

CONSÉQUENCE: Si l'on a un autre espace mesuré Z deux nombres $r_i \geq 1$, alors toute T linéaire:

$$L_z^{r_0} + L_z^{r_1} \rightarrow D + E$$

telle que

$$L_z^{r_0} \rightarrow D \quad \text{et} \quad L_z^{r_1} \rightarrow E$$

est telle que

$$L_z^{r_\theta} \rightarrow F.$$

(cela résulte de l'identité de CALDERON (voir [23]).

Preuve de la remarque 2:

On part de la relation de convexité:

$$|\, a \,|_{\theta s} \leq c \,|\, a \,|_0^{1-\theta} \,|\, a \,|_1^{\theta} \quad \text{si} \quad a \in B_0 \cap B_1 .$$

Vues l'inégalité de HÖLDER et la relation.

$$t f^{**}(t) = \sup_{|E| \leq t} \int_E |\, f(x) \,|\, dx$$

cela entraine que pour toute $f \in D \cap E$, on a:

$$f_{\theta r}^{**}(t) \leq (f_0^{**}(t))^{1-\theta} (f_1^{**}(t))^{\theta}$$

puis

$$|\, f \,|_F \leq C \,|\, f \,|_D^{1-\theta} \,|\, f \,|_E^{\theta} .$$

D'où le résultat, vue la théorie des espaces de la classe K_θ (voir [26]) (J. PEETRE a remarqué que notre preuve de (15) se transpose à tout couple d'interpolation $(B_j)_j$ avec $B_0 \neq B_1$).

§ 3. – Multiplicateurs dans $\mathfrak{F}L^p(\boldsymbol{R}^n)$.

Nous étudions dans ce paragraphe les opérateurs de convolution (K) sur $\boldsymbol{R}^n$ de noyau $K(x-y)$. On suppose qu'ils sont définis par une distribution tempérée $K \in \mathcal{S}'_x \widehat{\otimes} B_1$. On dit que $\widehat{K} = \mathfrak{F}K$ est un multiplicateur

$$\mathfrak{F}L^p(B_2) \rightarrow \mathfrak{F}L^p(B_3)$$

ou que K est un »convoluteur« dans L^p.

Les travaux de J. SCHWARTZ et BENEDEK CALDERON PANZONE ([3] et [36]) ont montré l'importance des «convoluteurs» et des multiplicateurs à valeurs vectorielles. Presque toutes les méthodes permettant l'obtention de tels multiplicateurs utilisent le théorème de PLANCHEREL et une certaine famille de cubes sur $\boldsymbol{R}^n$. (Il en est même ainsi des méthodes de [39] et [38], mais pas de [43]).

L'extension de la théorie (en remplaçant les cubes par des parallélipipédes), suggérée par JONES [18] (voir aussi ARNÈSE [21]) a été effectuée dans [20], exposée au Séminaire d'Analyse d'Orsay en avril 1965 devant A. ZYGMUND, puis ensuite reprise et étendue par différents auteurs ([9], [24], [5]).

Le théorème fondamental est le suivant:

THÉORÈME 3.

On se donne une famille $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *de nombres réels* $a_i > 0$. *Posons pour tout* $x \in \boldsymbol{R}_x^n$ $[x] = \max |x_i|^{1/a_i}$. *On désigne par* $\tilde{\tilde{L}}_x^p(B)$ *un sous espace de l'espace des fonctions étagées* $\boldsymbol{R}_x^n \to B$ *qui est dense dans* $L^p(B)$ *avec* $1 \leq p < \infty$.

Soit K une fonction localement sommable $\boldsymbol{R}_x^n \to B_1$, *à croissance lente et* $(K *)$ *l'opérateur de convolution par K.*

On suppose que

1. – *Il existe* $p_0 > 1$, *tel que*

(18) $$(K *) : \tilde{\tilde{L}}^{p_0}(B_2) \to L^{p_0 \infty}(B_3)$$

2. – *Il existe C et un entier* $A > 0$ *tel que pour tout entier relatif l et tout y tel que* $[y] \leq 2^{l-A}$

(19) $$\int_{[x] \geq 2^l} |K(x-y) - K(y)|\, dy \leq C.$$

(20) *Alors* $(K *) : \tilde{\tilde{L}}^1(B_2) \to L^{1\infty}(B_3)$.

COROLLAIRES.

1. – On peut comme dans [21] appliquer un théorème d'interpolation de [23]; ou bien, comme $L^{1\infty}$ est complet (voir [4]) déduire de (18) et (20) que (K) est de type faible (p_0, p_0) et $(1, 1)$, puis appliquer le théorème d'interpolation de MARCINKIEWICZ: $(K *)$ définit un opérateur continu de L^p si $1 < p < p_0$.

2. – Théorème d'isomorphisme de LITTLEWOOD PALEY (voir [36] et [21]).

3. – Théorème de type MIHLIN [31]. Ce théorème est vrai pour les fonctions K à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(H)$ où H est un espace de HILBERT complexe: voir note terminant [21]:

Si K est telle que

$$[\xi]^{\sum_{i=1}^{\infty} a_i k_i} \left\| \frac{\partial^{|k|} K(\xi)}{\partial^{k_1}\xi_1 \dots \partial^{k_n}\xi_n} \right\| \leq C \tag{21}$$

Pour tous les $k = k_1 \dots k_n$ tels que $k_i = 0$ ou 1 alors K est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(H)$ avec $1 < p < \infty$.

LIZORKIN a énoncé (voir [28]) un théorème analogue où $[\xi]^{\vec{a}\cdot\vec{k}}$ est remplacé par $|\xi^k|$ et dont SHAMIR ([37]) annonce la démonstration.

4. – *Propriétés des fonctions de Lusin-Littlewood-Paley* (voir [41] et [3]).

Il semble à présent que l'emploi de ces fonctions est très puissant. Cet emploi a permis à CALDERON [6] de montrer que le commutateur $(a)(k*) - (k*)(a\cdot)$ de la multiplication par une fonction a et d'une intégrale singulière $k*$ envoie L^p dans $L^{p,1}$ sans supposer que les dérivées premières de a sont höldériennes.

Cet emploi a permis à E. STEIN et à Y. MEYER ([32] et [42]) d'obtenir des multiplicateurs dans les classes de HARDY H^p (avec $p > 0$).

§ 4. – Cas des normes mixtes.

Dans cartaines applications, il est utile de considérer les normes mixtes de BENEDEK PANZONE ([3]) et la version anisotrope [20] des inégalités de CALDERON ZYGMUND, du théorème de LITTLEWOOD PALEY, du théorème de MIHLIN. Comme tout résulte des inégalités de CALDERON ZYGMUND, il suffit de vérifier l'extension au cas anisotrope des raisonnements de [3]:

NOTATIONS:

On se donne une famille de n réels p_i $(1 < p_i < \infty)$

$$\vec{p} = (p_1 p_2 \cdots p_n) = (p_1, p')$$

soit aussi

$$x = (x_1 x_2 \dots x_n) = (x_1, x').$$

Les espaces $L_x^{\vec{p}}(B)$ sont définis par récurrence sur n.

$$\overline{B}_j = L_{x_1}^{p_1}(B_j) \quad \text{est l'espace des} \quad f : \boldsymbol{R}_{x_1}^1 \to B_j \tag{22}$$

qui sont dans $L^{p_1}(B_j)$ $L^{\vec{p}}(B_j) =$ les $f : \boldsymbol{R}^n_{(x,x')} \to B$ telles que $x' \to f(\cdot, x')$ soit dans $L^{p'}(\overline{B}_j)$.

Par exemple $L^{p_1p_2}(B_j)$ est formé des $f: \boldsymbol{R}^2_{x_1x_2} \to B_j$ telles que

$$|f|_{\vec{p}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1x_2)|_{B_j}^{p_1} dx_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{1/p_2} < \infty.$$

THÉORÈME 4.

Soit $K: \boldsymbol{R}^n_x \to B_1$, *localement sommable à croissance lente telle que*

1. – *Il existe un multi-indice* q *tel que*

(23) $$(K\,*): L^q(B_2) \to L^q(B_3)$$

2. – *Il existe une constante* C *et un entier* $a > 0$ *tel que pour tout entier relatif* l *et tout* y *tel que* $[y] \leq 2^{l-A}$ *on a*

(24) $$\int_{[x]\geq 2^l} \| K(x-y) - K(x) \|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)}\, dx \leq C$$

Alors pour tout multi-indice $p(1 < p_i < \infty)$:

(25) $$(K\,*): L^p(B_2) \to L^p(B_3).$$

DÉMONSTRATION.

Soit φ une fonction étagée: $\boldsymbol{R}^n_x \to B_2$ (comme dans la démons tration du théorème 3 de [21]). Définissons $\tilde{\varphi}: \boldsymbol{R}^n_x \to B_3$ par:

$$\tilde{\varphi}(x_1, x') = \iint k(x_1 - y_1, x' - y')\varphi(y_1, y')dy_1dy'$$

soit

$$\tilde{\varphi}(\cdot, x') = \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}_{y'}} l(x'-y')\varphi(\cdot, y')dy'$$

où l est la fonction $\boldsymbol{R}^n_{x'} \to \mathcal{L}(\bar{B}_2, \bar{B}_3)$ ainsi définie: pour toute fonction étagée $\psi: \boldsymbol{R}^1_{x_1} \to B_1$ et tout $z' \in \boldsymbol{R}^{n-1}_{x'}$ on a:

$$(l(z')\psi)(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x_1 - y_1, z')\psi(y_1)dy_1.$$

On va montrer le théorème 4 par récurrence snr n. Ce théorème est vrai pour $n = 1$. Supposons le vrai pour $n-1$ $(n > 1)$ et pour tous les espaces de BANACH. On peut donc essayer de l'appliquer au convoluteur

$$l : \boldsymbol{R}_{x'}^{n-1} \to \mathcal{L}(\overline{B}_2, \overline{B}_3).$$

Comme k vérifie (23), l vérifie une condition analogue. Or l'inégalité de MINKOWSKI montre que

$$| l(x'-y') - l(x') |_{\mathcal{L}(\overline{B}_2,\overline{B}_3)} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} | k(x_1, x'-y') - k(x_1, x')_{\mathcal{L}(B_2,B_3)} | \, dx_1 .$$

On a donc pour tout y' tel que $[y'] \leq 2^{\lambda-\alpha}$

$$\int_{[x'] \geq 2^\lambda} | l(x'-y') - l(x') |_{\mathcal{L}(B_2,B_3)} dx' \leq$$

$$\leq \int_{[x'] \geq 2^\lambda} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} | k(x_1, x'-y') - k(x_1, x') | \, dx_1 \leq$$

$$\leq \int_{[x] \geq 2^\lambda} | k(x_1 - 0, x'-y') - k(x_1, x') | \, dx \leq C$$

l vérifiant l'hypothèse seconde du théorème 4, on a

$$(l *) : L^{p'}(\overline{B}_2) \to L^{p'}(\overline{B}_3) \tag{26}$$

pour tout $p' = (p'_1 \ldots p'_n($ tel que $1 < p'_i < q_i$.

Par transposition et interpolation (voir [21] par exemple) on en déduit que l'on a (26) pour tout p' avec $1 < p' < \infty$. Ceci signifie que K vérifie (25).

§ 5. – Cas des espaces L^p avec poids.

Lorsqu'on a démontré la continuité d'un certain opérateur K dans des espaces L^p ou L^{pq}, on peut se demander si cette propriété subsiste lorsqu'on remplace les mesures dx et dy permettant de définir les espaces L^p ou L^{pq} par des mesures du type $\bar{\omega}(x)dx$ où $\bar{\omega}$ est un *poids*, c'est-à-dire une fonction mesurable à valeurs positives.

D'où des espaces L'^p L'^{pq}.

EXEMPLE.

Sur la droite $\boldsymbol{R}_x$ munie de la mesure dx on sait (depuis M. RIESZ) que la convolution par v.p. $\frac{1}{x}$ définit un opérateur linéaire continu de L_x^p. HARDY et LITTLEWOOD ont prouvé qu'il en est de même si l'on remplace la mesure dx par $| x |^{\alpha p} dx$ avec $-\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p'}$.

Ce résultat a été généralisé par E. STEIN et BABENKO aux intégrales singulières usuelles sur $\boldsymbol{R}^n$ et par C. SADOSKI [34] aux intégrales singulières de [23].

Toutes ces techniques sont «réelles». On peut appliquer des méthodes «complexes» (voir [10] par exemple).

Les techniques «réelles» sont fondées sur des remarques simples (mais non immédiates) et qui permettent de ramener l'étude du cas pondéré à l'étude du cas non pondéré.

REMARQUE 1.

Si la fonction f est dans L^{pq} et si la fonction g est dans $L^{\pi\infty}$ alors (voir [1])

$$(gf)^*(2t) \leq g^*(t)f^*(t) \tag{27}$$

et l'inégalité de HÖLDER montre que gf est dans L^{rq} avec $q \geq 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{p}$.

(28) En particulier si $g = \omega^{-1} \in L^{\pi\infty}$ on a $L'^p \subseteq L^{rp}$ si $r = \dfrac{\pi}{\pi+1} p$

REMARQUE 2.

P. J. ARANDA et E. P. CATTANEO ont démontré [1] une inclusion en sens inverse, soit:

$$\omega \in L^{\pi\infty} \quad \text{entraine} \quad L^{pq} \subseteq L'^q \tag{29}$$

$\left(0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty,\ 1 < \pi < \infty,\ r = \dfrac{\pi+1}{\pi} p\right)$.

Utilisation des remarques 1 et 2.

Il est clair qu'en composant les applications continues (28) et (29) avec l'application continue définie par K dans le cas non pondéré, on obtient des théorèmes de continuité de K dans des espaces avec poids: c'est ce qui est fait dans [1].

REMARQUE 3. (Voir [14] et proposition 2 de [22]).

L'espace localement compact Ω est muni d'une mesure dx. Si K est un noyau mesurable $\Omega \times \Omega \to C$, localement sommable il définit un opérateur (noté (K)) transformant une fonction φ étagée sur (soit $\mathcal{E}$ leur ensemble) en une fonction mesurable

$$\tilde{\varphi} \quad \text{avec} \quad \tilde{\varphi}(x) = \int K(x, y)\varphi(y)dy$$

ω est un poids, strictement positif presque partout sur Ω.

On suppose

$$(K): L^p \to L^p.$$

On se demande si

$$(K): L'^p \to L'^p.$$

Si l'on suppose $\omega^{1/p} \cdot \mathcal{E}$ dense dans L^p, cela revient à voir que

$$(\omega^{1/p} \cdot)\,(K)\left(\frac{1}{\omega^{1/p}} \cdot\right) : L^p \to L^p.$$

Il suffit de voir qu'il en est ainsi pour

$$(L) = (\omega^{1/p} \cdot)\,(K)\left(\frac{1}{\omega^{1/p}} \cdot\right) - (K)$$

dont le noyau est

$$L(x,\ y) = \frac{\omega^{1/p}(x) - \omega^{1/p}(y)}{\omega^{1/p}(y)} K(x,\ y).$$

(30) On étudie (L) en remarquant qu'il est le composé de deux opérateurs: la multiplication par $\omega^{-1/p}$ à laquelle on peut appliquer la remarque 1, et un opérateur dont le noyau est majoré par le noyau positif:

(31) $$M(x,\ y) = |\,\omega^{1/p}(x) - \omega^{1/p}(y)\,| \cdot |\,K(x,\ y)\,|$$

et auquel on peut appliquer le théorème 2. La remarque 3 peut être illustrée par le:

THÉORÈME 5.

Soit un opérateur (K) défini par un noyau localement sommable sur un espace Ω_x muni d'une mesure $dx > 0$, et définissant un opérateur continue de L^p. Considérons sur Ω un poids ω sur Ω, > 0 presque partout tel que $\omega^{1/p}\mathcal{E}$ est dense dans L^p.

On suppose que

(32) $$\omega^{-\frac{1}{p}} \in L^{\frac{1}{\alpha}\infty} \quad \text{et} \quad M(x,\ y) \in L^{\infty}_{x}(L_{y}^{\frac{1}{1-\alpha}\infty}) \cap L^{\infty}_{y}(L_{x}^{\frac{1}{1-\alpha}\infty}).$$

Alors (K) définit un opérateur continu dans $L'^p =$ l'espace de Lebesgue sur Ω associé à la mesure $\omega(x)dx$.

(cet énoncé contient un énoncé de J. PEETRE, [35] et le théorème 2 de [22]; ce théorème 2 était nouveau non pas tellement par sa démonstration (qui suivait [40] bien que j'ignorais alors cet article) mais par la formulation et les applications données).

Application aux intégrales singulières anisotropes de [24]:

$$\omega^{1/p}(x) = [x]^\beta$$

avec $0 \leq \beta < \frac{|a|}{p'}$ et $a_i \geq \beta$ pour tout i

$$|K(x, y)| \leq [x - y]^{\beta - |a|}.$$

Comme $[\cdot]^\alpha$ est alors une distance on a

$$M(x, y) \leq [x - y]^{\beta - |a|}.$$

Si K définit un opérateur continu dans L^p, il définit aussi un opérateur continu dans L'^p car la fonction

$$x \to [x]_{-\gamma} \quad \text{est dans} \quad L^{\frac{|a|}{\gamma}, \infty} \quad \text{si} \quad \gamma > 0.$$

RÉFÉRENCÉS

[1] P. J. ARANDA e E. P. CATTANEO, C.R. Acad. Sc. Paris, t 264 (16 Janv. 1967), pp. 109-112.

[2] ARNESE, Ric. di math., Vol. XIII (1964), pp. 1-45.

[3] BENEDEK-CALDERON-PANZONE, Proc. Nat. Acad. of sc., Vol. 48, N° 3 (March 1963), pp. 356-365.

[4] C. A. BERENSTEIN, C.R. Acad. Sc. Paris, t 263 (12 Sept 1966), pp. 368-371.

[5] O. V. BESOV, V. P. ILLIN et P. I. LIZORKIN, Doklady t 169 (1966), pp. 1250-1253 et soviet Math. Juillet Août, (1966), pp. 1065-1070.

[6] A. P. CALDERON. (Conférence orale à Paris (1966)).

[7] A. P. CALDERON et A. ZYGMUND, Act. Math., 88 (1952), pp. 85-139.

[8] — —, Amer. Journ. of Math., t 78 (1956), pp. 810-320.

[9] E. FABES et RIVIÉRE, Studia Math. 1966.

[10] GAPOUCHKIN, Math. Sbornik, 88 (1958), pp. 359-372.

[11] CARLEMAN, *Sur les équations intégrales singulières* ..., Upsula (1963).

[12] COTLAR, *Condiciones de continuidad* ..., Cursos y seminarios, fasc. 2, Buenos Aires (1959).

[13] H. LITTLEWOOD, Duke Math. Journ., n. 2 (1936), pp. 354 382.

[14] HIRSCHMAN, Duke Journ., 26 (1956), pp. 221-242.

[15] L. HÖRMANDER, Act. Math., 104 (1960), pp. 93-140.

[16] R. HUNT, Bull. AMS, vol. 76 n. 6 (Nov. 1964), pp. 803-807.

[17] IGARI, Tohcku Journal March., (1963), pp. 6-36.
[18] JONES, Bull. AMS, 69 (1963), pp. 501-503.
[19] — —, Amer. Journ. of Math., vol. 86 n. 2 (Avril 1964), pp. 441-462.
[20] P. KRÉE, Comptes Rendus Acad. Sc., t 260 (Avril 1965), 4401-4403.
[21] — —, Annales de l'Institut Fourier, t XVI fasc. 2 (1966), pp. 31-89.
[22] — —, Annales de l'Institut Fourier, t. XVI fasc. 2, pp. 90-121.
[23] — —, Annales de l'Institut Fourier (à paraître).
[24] — —, C.R. Acad. Sc. Paris, t 261 (4 Oct. 1965), pp. 2560-2563.
[25] — —, C.R. Acad. Sc. Paris, t 292 (24 Janv. 1966), pp. 222-225.
[26] J. L. LIONS et J. PEETRE, Publications bleues de l'IHES, n.19, (1964).
[27] L. PALEY, Proc. Lond, Math. Soc., 42 (1937), pp. 52-89.
[28] LIZORKIN, Doklady, 152 (1963), pp. 808-811.
[29] B. MALGRANGE, Exp. 7. Séminaire Schwartz (1959-60).
[30] MARCINKIEWICZ, Stud. Math., vol. 8 (1939), pp. 78-91.
[31] MIHLIN, Doklady, 109 (1956), pp. 701-703.
[32] Y. MEYER, CRAS, t 263 (19 Sept. 1966), pp. 385-387.
[33] O. NEIL, Duke Journal J., 30 (1963), pp. 129-142.
[34] J. PEETRE, (à paraître).
[35] C. SADOSKI, Studia Mathematica (1966).
[36] J. SCHWARTZ, Comm. P. and Appl. Mat., 14 (1961), pp. 785-799.
[37] SHAMIR, (à, paraître).
[38] SPANNE, (à paraître).
[39] G. STAMPACCHIA, (à paraître).
[40] E. STEIN, Proc- Am. Math. Soc., 8 (1957), pp. 254-290.
[41] — —, Trans. AMS, 88 (1958), pp. 430-466.
[42] — —, C.R. Acad. Sc. Paris, t 263 (21 Nov. 1966), pp. 780-782.
[43] G. WEISS et O. NEIL, Studia Mathem., t XXIII fasc. 2 (1963), p. 189.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M I.
il 24 aprile 1967