Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ferruccio Fontanella

Problemi di convergenza nell'interpolazione di tipo misto Lagrange-Hermite.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 324–329.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_324_0>

Problemi di convergenza nell'interpolazione di tipo misto Lagrange-Hermite

FERRUCCIO FONTANELLA (Firenze) (*)

Sunto. - *We consider the interpolating polynomial S_{2n+p-1} satisfing*

$$S_{2n+p-1}(x_k) = f(x_k) \qquad S'_{2n+p-1}(x_k) = 0 \qquad k = 1, 2, \dots, n$$
$$S_{2n+p-1}(\xi_i) = c \qquad i = 1, 2, \dots, p$$

where x_k are the zeros of the n-th Tchebycheff polynomial of the first kind and the ξ_i are p adjoined abscissas, indipendendt of n and different from the zeros of the above mentioned polynomial.

We have demonstrated a convergence theorem true for functions of the type

$$f(x) = c + |x - \xi_1|^{\alpha_1} |x - \xi_2|^{\alpha_2} \dots |x - \xi_p|^{\alpha_p} \varphi(x)$$

where $\alpha_j > 0$ $j = 1, 2, \dots, p$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j > 2p - 2$$

and $\varphi(x)$ continue function.

1. Assegnati nell'intervallo $[-1, 1]$, n punti distinti x_1, x_2, ..., x_n e, corrispondentemente, n valori y_1, y_2, ..., y_n è noto che il polinomio di interpolazione di LAGRANGE è l'unico polinomio di grado $\leq n - 1$ che negli n punti assegnati assume i valori y_1, y_2, ..., y_n, mentre il polinomio di interpolazione di HERMITE è l'unico polinomio di grado $\leq 2n - 1$ che nei punti x_1, x_2, ..., x_n assume i valori y_1, y_2, ..., y_n ed inoltre, negli stessi punti, assume derivata prima assegnata.

In un mio recente lavoro [1], riprendendo una nota di L. MERLI [2], ho considerato il polinomio di interpolazione

$$S_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} y_k \frac{x}{x_k} [1 - (1/x_k + \omega''_n(x_k)/\omega'_n(x_k))(x - x_k)][l_k^{(n)}(x)]^2 \tag{1}$$

con $n = 2m$, m intero, e con

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \qquad l_k^{(n)} = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_k)(x - x_k)}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 6 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R. per l'anno 1966-67.

che negli n punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ assume, rispettivamente, i valori $y_1, y_2, \ldots, y_n$, con derivata prima nulla in tali punti e che, inoltre, si annulla per $x = 0$, senza alcuna condizione sulla derivata prima in tale punto, ed ho dimostrato il teorema:

Data una funzione $\varphi(x)$, continua nell'intervallo $[-1, 1]$, posto $f(x) = c + |x|^\alpha \varphi(x)$ (1) con $\alpha > 0$, assegnati nei punti fondamentali $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zeri del polinomio di TCHEBYCHEFF di 1ª specie, i valori $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, si consideri il polinomio $S_{2n}(x)$ che nel punto x_k assume il valore $f(x_k)$ e con $S'_{2n}(x_k) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, n$ e tale che sia $S_{2n}(0) = 0$ (2), senza alcuna ipotesi sul valore $S'_{2n}(0)$, allora si ha, uniformemente in $[-1, 1]$,

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n}(x) = f(x).$$

Scopo di questa nota è un'estensione di tale risultato. Dato il polinomio, di grado $\leq 2n + p - 1$,

$$S_{2n+p-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{(x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_p)}{(x_k - \xi_1)(x_k - \xi_2) \ldots (x_k - \xi_p)} [l_k^{(n)}(x)]^2 M_{k,p}(x), \tag{3}$$

con

$$M_{k,p}(x) = 1 - [\omega''_n(x_k)/\omega'_n(x_k) + (x_k - \xi_1)^{-1} + (x_k - \xi_2)^{-1} + \ldots + (x_k - \xi_p)^{-1}](x - x_h)$$

e con $\omega_n(x)$ ed $l_k^{(n)}$ date dalle (2), sarà infatti dimostrato il teorema:

Data una funzione $\varphi(x)$, continua nell'intervallo $[-1, 1]$, posto

$$f(x) = c + |x - \xi_1|^{\alpha_1} |x - \xi_2|^{\alpha_2} \ldots |x - \xi_p|^{\alpha_p} \varphi(x) \text{ (3)},$$

con $-1 < \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p < 1$, dove $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ non sono zeri del polinomio di TCHEBYCHEFF di 1ª specie, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, e con $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p > 2p - 2$, assegnati nei punti fondamentali $x_1, x_2, \ldots, x_n$, zeri del polinomio di TCHEBYCHEFF di 1ª specie, i valori $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, si consideri il polinomio $S_{2n+p-1}(x)$ che nel punto x_k assume il valore $f(x_k)$, con $S'_{2n+p-1}(x_k) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, n$, e tale che $S_{2n+p-1}(\xi_i) = 0$ $i = 1, 2, \ldots, p$, senza alcuna ipotesi

(1) La costante c può essere assunta, per semplicità, uguale a zero senza perdere in generalità.

(2) Si noti che nelle ipotesi fatte ($n = 2m$), $x = 0$ non è zero del polinomio di TCHEBYCHEFF di 1ª specie.

(3) Si veda la nota (1).

sul valore $S'_{2n+p-1}(\xi_i)$, $i = 1, 2, .., p$, allora si ha, ed uniformemente in $[-1, 1]$,

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+p-1}(x) = f(x) \text{ (4)}.$$

2. Il teorema enunciato sarà dimostrato, per semplicità di calcolo, nel caso particolare $p = 2$, ma la dimostrazione per p qualunque è perfettamente analoga. Il polinomio $S_{2n+1}(x)$ sarà indicato da ora in avanti semplicemente con $S(x)$.

Nelle ipotesi fatte si ha

$$p = 2 \qquad \omega_n(x) = \cos n\theta \qquad x = \cos\theta$$
$$x_k = \cos\theta_k = \cos(2k-1)\pi/2n \qquad k = 1, 2, ..., n$$
$$\xi_1 \neq \xi_2 \qquad \xi_i \neq x_k \qquad k = 1, 2, ..., n;\ i = 1, 2,$$

ed il polinomio (3) assume la forma:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{(\cos\theta - \xi_1)(\cos\theta - \xi_2)}{(\cos\theta_k - \xi_1)(\cos\theta_k - \xi_2)} \frac{\cos^2 n\theta \operatorname{sen}^2\theta_k}{(\cos\theta - \cos\theta_k)^2} [1 - P(\theta_k, \xi_1, \xi_2)] n^{-2}$$

con $P(\theta_k, \xi_1, \xi_2) = [\cos\theta_k \cdot \operatorname{sen}^{-2}\theta_k + (\cos\theta_k - \xi_1)^{-1} + (\cos\theta_k - \xi_2) n^{-1}] \cdot$ $(\cos\theta - \cos\theta_k)$, ovvero, posto

$$N(\theta_k, \xi_1, \xi_2) = (\cos\theta_k - \xi_1)(\cos\theta_k - \xi_2)(1 - \cos\theta_k \cos\theta) -$$
$$- \operatorname{sen}^2\theta_k(\cos\theta - \cos\theta_k)(2\cos\theta_k - \xi_1 - \xi_2)$$

(4)
$$S(x) = n^{-2} \sum_{k=1}^{n} y_k \cos^2 n\theta(\cos\theta - \xi_1)(\cos\theta - \xi_2) \cdot$$
$$\cdot [(\cos\theta - \cos\theta_k)(\cos\theta_k - \xi_1)(\cos\theta_k - \xi_2)]^{-2} \cdot N(\theta_k, \xi_1, \xi_2)$$

con

(5)
$$y_k = |x_k - \xi_1|^{\alpha_1} |x_k - \xi_2|^{\alpha_2} \varphi(x_k) =$$
$$= |\cos\theta_k - \xi_1|^{\alpha_1} |\cos\theta_k - \xi_2|^{\alpha_2} \varphi(\cos\theta_k) = f(x_k),$$
$$\alpha_1 > 0, \qquad \alpha_2 > 0 \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Si consideri, ora, il polinomio interpolante di HERMITE che nei punti $x_1, x_2, ..., x_n$ assume rispettivamente i valori $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ e la cui derivata è nulla negli stessi punti. Tale polinomio

(4) Per altre ricerche sull'interpolazione di tipo misto di LAGRANGE-HERMITE connesse alla presente nota si vedano anche i lavori di P. SZASZ [3], [4].

ha grado $\leq 2n - 1$ e, nel caso considerato, ha la forma

$$H(x) = n^{-2} \sum_{k=1}^{n} y_k \cos^2 n\theta (1 - \cos\theta \cos\theta_k)(\cos\theta - \cos\theta_k)^{-2} \tag{6}$$

con le y_k date dalle (5).

È noto (5) che, essendo $f(x) = |x - \xi_1|^{\alpha_1} |x - \xi_2|^{\alpha_2} \varphi(x)$ continua in $[-1, 1]$, vale

$$\lim_{n \to \infty} H(x) = |x - \xi_1|^{\alpha_1} |x - \xi_2|^{\alpha_2} \varphi(x). \tag{7}$$

Dalla (4) e dalla (6) si ha

$$S(x) - H(x) = n^{-2} \sum_{k=1}^{n} y_k \cos^2 n\theta (\cos\theta_k - \xi_1)^{-2} (\cos\theta_k - \xi_2)^{-2} \cdot \Theta(\theta, \theta_k, \xi_1, \xi_2)$$

con

$$\begin{aligned} \Theta(\theta, \theta_k, \xi_1, \xi_2) &= \cos^2\theta_k (\cos\theta\cos\theta_k - 1) - 2\cos\theta\cos\theta_k + \\ &+ (\xi_1 + \xi_2)(\cos\theta + 2\cos\theta_k) - \xi_1\xi_2(\cos\theta\cos\theta_k + 2\cos^2\theta_k - 1) - \\ &- (\xi_1 + \xi_2)^2 + \xi_1\xi_2(\xi_1 + \xi_2)\cos\theta_k, \\ |\Theta(\theta, \theta_k, \xi_1, \xi_2)| &< L \end{aligned}$$

con L costante universale.

Quindi

$$|S(x) - H(x)| < Ln^{-2} \sum_{k=1}^{n} y_k (\cos\theta_k - \xi_1)^{-2} (\cos\theta_k - \xi_2)^{-2},$$

ovvero

$$|S(x) - H(x)| < Cn^{-2} \sum_{k=1}^{n} |\cos\theta_k - \xi_1|^{\alpha_1 - 2} |\cos\theta_k - \xi_2|^{\alpha_2 - 2} \tag{8}$$

con C costante universale. Se

$$\alpha_1 \geq 2 \qquad \alpha_2 \geq 2$$
$$|\cos\theta_k - \xi_1|^{\alpha_1 - 2} < M$$
$$|\cos\theta_k - \xi_2|^{\alpha_2 - 2} < N$$

con M ed N costanti universali e dalla (8) si ha

$$|S(x) - H(x)| < CMN/n. \tag{9}$$

(5) Teorema di FEJER. Si veda, ad es., G. SANSONE [5].

Se

$$\alpha_1 \geq 2 \qquad \alpha_2 < 2$$

$|\cos \theta_k - \xi_1| < M$ con M costante universale e dalla (8) si ha

$$(10) \qquad |S(x) - H(x)| < (CM/n^2) \sum_{k=1}^{n} |\cos \theta_k - \xi_2|^{\alpha_2 - 2}$$

ed è stato dimostrato in [1] che per $\alpha_2 > 0$ tale differenza, al crescere di n, finisce col restare minore di un numero ε positivo prefissato.

Analogamente si tratta il caso

$$\alpha_1 < 2, \qquad \alpha_2 \geq 2.$$

Se

$$\alpha_1 < 2, \qquad \alpha_2 < 2$$

posto

$$\xi_1 = \cos \psi_1, \qquad \xi_2 = \cos \psi_2 \qquad\qquad 0 < \psi_1,\ \psi_2 < \pi,$$

si ha

$$|\cos \theta_k - \cos \psi_1| = 2\,|\mathrm{sen}\,((\theta_k + \psi_1)/2)\,\mathrm{sen}\,((\theta_k - \psi_1)/2)|$$

con

$$0 < \frac{\theta_k + \psi_1}{2} < \pi \qquad -\frac{\pi}{2} < \frac{\theta_k - \psi_1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

per cui

$$|\mathrm{sen}\,((\theta_k + \psi_1)/2)| > q_1 .$$

Analogamente per ψ_2 si ottiene

$$|\mathrm{sen}\,((\theta_k + \psi_2)/2)| > q_2$$

con q_1 e q_2 costanti, e dalla (8) si ha

$$|S(x) - H(x)| < \bar{C} n^{-2} \sum_{k=1}^{n} |\mathrm{sen}\,((\theta_k - \psi_1)/2)|^{\alpha_1 - 2} |\mathrm{sen}\,((\theta_k - \psi_2)/2)|^{\alpha_2 - 2}$$

con $\bar{C}$ costante universale. Posto $\psi_1 = \delta_1 \pi$, $\psi_2 = \delta_2 \pi$ con $0 < \delta_1$, $\delta_2 < 1$, si ha

$$|S(x) - H(x)| < \bar{C} n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \{ |\pi(2k - 1 - 2n\delta_1)/4n|^{2-\alpha_1} \cdot$$

$$\cdot |\mathrm{sen}\,((2k - 1 - 2n\delta_1)\pi/4n)|^{\alpha_1 - 2} |4n/\pi|^{2-\alpha_1} |2k - 1 - 2n\delta_1|^{\alpha_1 - 2} \cdot$$

$$\cdot |(2k - 1 - 2n\delta_2)\pi/4n|^{2-\alpha_2} |\mathrm{sen}\,((2k - 2n\delta_2)\pi/4n)|^{2-\alpha_2} \cdot$$

$$\cdot \,|\, 2k - 1 - 2n\delta_r \,|^{\alpha_2 - 2} \,|\, < C' n^{-2} n^{4-(\alpha_1+\alpha_2)} \sum_{k=1}^{n} |\, 2k - 1 - n\delta_2 \,|^{\alpha_2 - 2}$$

$$(11) \qquad |\, S(x) - H(x) \,| < C'' n^{2-(\alpha_1+\alpha_2)} \sum_{k=1}^{n} j^{\alpha_1+\alpha_2-4}$$

con C' e C'' costanti universali.

Se $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 3$

$$\sum_{k=1}^{n} j^{\alpha_1+\alpha_2-4} < \int_1^n x^{\alpha_1+\alpha_2-4} = (n^{\alpha_1+\alpha_2-3} - 1)/(3 - \alpha_1 - \alpha_2)$$

e dalla (11) si ha

$$(12) \qquad |\, S(x) - H(x) \,| < C n^{2-\alpha_1-\alpha_2} (n^{\alpha_1+\alpha_2-3} - 1)/(3 - \alpha_1 - \alpha_2)$$

con C costante universale, e tale differenza a zero al crescere di n *se* $\alpha_1 + \alpha_2 > 2$.

Se $\alpha_1 + \alpha_3 = 3$ si ha, dalla (11),

$$(13) \qquad |\, S(x) - H(x) \,| < C'/n \sum_{j=1}^{n} j^{-1} = (C''/n) O(\log n)$$

con C'' costante universale.

Dalle (9), (10), (12), (13) si ha quindi

$$\lim_{n \to \infty} S(x) = \lim_{n \to \infty} H(x) = |\, x - \xi_1 \,|^{\alpha_1} \,|\, x - \xi_2 \,|^{\alpha_2} \varphi(x),$$

con $\alpha_1 + \alpha_2 > 2$, come volevasi dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. FONTANELLA, *Su una formula di interpolazione di tipo misto Lagrange-Hermite*, « Riv. Mat. Univ. Parma » (2), 7 (1966), 32-37.

[2] L. MERLI, *Le formule di interpolazione di tipo misto di Lagrange e Hermite per la classe delle funzioni del tipo* $f(x) = c + x^2\varphi(x)$, « Riv. Mat Univ. Parma » (2), 6 (1965), 17-21.

[3] P. SZASZ, *On quasi-Hermite-Fejer interpolation*, « Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae », 10 (1959), 413-439.

[4] — —, *The extended Hermite-Fejér interpolation formula with applications to the theory of generalized almost step paraboles*, « Publicationes Math. », 11 (1964), 85-100.

[5] G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, cfr. Parte II dell'opera G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, III ediz., Zanichelli, Bologna 1952.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 12 aprile 1967.