Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulio Mattei

Sulla instabilità magnetogravitazionale di un mezzo comprimibile in rotazione uniforme. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.3, p. 301–310.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_3_301_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sulla instabilità magnetogravitazionale di un mezzo comprimibile in rotazione uniforme

GIULIO MATTEI (Pisa) (*) (**)

NOTA II

Effetti dissipativi

Sunto. - *Si estendono al caso in cui siano presenti viscosità e conducibilità elettrica finita i risultati di una precedente nota sulla instabilità magnetogravitazionale di un mezzo indefinito, comprimibile, in rotazione uniforme, relativamente a una certa classe di perturbazioni ad ampiezza variabile.*

Summary. - *In this paper the author extends to the case when viscosity and finite electrical conductivity are present the results of a preceding paper on the magnetogravitational instability of an infinite, compressible medium in uniform rotation, relatively to a certain class of perturbations of variable amplitude.*

Introduzione.

In una precedente nota [1] é stata determinata la condizione di instabilità magnetogravitazionale relativa a un mezzo indefinito, comprimibile, dotato di una rotazione uniforme, quando le perturbazioni non sono piane e non hanno ampiezza costante. Precisamente, nel caso di simmetria cilindrica rispetto all'asse di rotazione, si sono considerate perturbazioni, propagantesi lungo l'asse, le cui ampiezze dipendono dalla distanza da esso tramite funzioni di BESSEL.

In [1] il fluido é considerato non dissipativo. Scopo della presente nota é di estendere la [1] studiando gli effetti sul problema in questione della viscosità e della conducibilità elettrica χ finita (1).

(*) Lavoro effettuato nell'ambito del Gruppo di Ricerca N. 7 per la Matematica del C.N.R.

(**) Istituto di Matematiche Applicate Fac. Ingegneria Università Pisa.

(1) Considerando perturbazioni piane ad ampiezza costante l'influenza della viscosità e di χ finita é stata esaminata da A. G. PACHOLCZYK e

1. Assenza di campo magnetico.

Le equazioni linearizzate, con riferimento ad una terna di assi uniformemente rotante con la velocità di rotazione Ω della massa fluida, sono (cfr. per es. [2], [3], [4] e S. CHANDRASEKHAR [5] § 119, 120, S. CHANDRASEKHAR-E. FERMI [6] Sect. V):

$$(1.1)\quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{a^2}{\rho_0}\operatorname{grad}\rho' + 2\boldsymbol{v}\wedge\Omega + \operatorname{grad}U' + \frac{\lambda+\eta}{\rho_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \frac{\eta}{\rho_0}\Delta_2\boldsymbol{v},$$

$$(1.2)\quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v}, \qquad (1.3)\quad \Delta_2 U' = -4\pi G\rho',$$

dove a é la velocità locale del suono, ρ' e U' sono le perturbazioni nella densità e nel potenziale gravitazionale, η é il coefficiente di viscosità di scorrimento, λ quello di compressione e gli altri simboli hanno il significato abituale.

Assunta come terna di riferimento rotante una terna T di coordinate cilindriche ortogonali r, φ, z con z asse di rotazione, la (1.1) proiettata su T dà:

$$(1.4)\quad \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial r} + 2\Omega v_\varphi + \frac{\partial U'}{\partial r} + \frac{\lambda+2\eta}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] - \frac{\eta}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right),$$

$$(1.5)\quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = -2\Omega v_r - \frac{\eta}{\rho_0}\left\{-\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right]\right\},$$

$$(1.6)\quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{a^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial z} + \frac{\partial U'}{\partial z} + \frac{\lambda+2\eta}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] - \frac{\eta}{\rho_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right].$$

Le (1.2) e (1.3) forniscono:

$$(1.7)\quad \frac{\partial\rho'}{\partial t} = -\rho_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right],$$

$$(1.8)\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U'}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} = -4\pi G\rho'.$$

J. S. STODOLKIEWICZ in [2], supponendo il fluido viscoso e χ infinita, e in [3], supponendo il fluido non viscoso e χ finita, ed infine da K. KOSSACKI in [4], supponendo il fluido viscoso e χ finita.

Richiediamo al sistema (1.4)-(1.8) soluzioni del tipo (cfr. [1] (12)):

$$
\begin{aligned}
v_r &= \bar{v}_r J_1(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} \\
v_\varphi &= \bar{v}_\varphi J_1(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} \\
v_z &= \bar{v}_z J_0(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} \\
\rho' &= \bar{\rho}' J_0(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} \\
U' &= \bar{U}' J_0(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

dove J_1 e J_0 sono le funzioni di Bessel di prim aspecie d'ordine uno e zero e γ una costante reale; $\bar{v}_r$, $\bar{v}_\varphi$, $\bar{v}_z$, $\bar{\rho}'$ e $\bar{U}'$ sono delle costanti da considerarsi molto piccole in accordo col fatto che si usano equazioni linearizzate. Le (1.9) assicurano regolarità in tutto il campo e limitatezza. Considerando al solito k prefissato reale determiniamo dapprima la relazione di dispersione.

Sostituendo (1.9) in (1.4)-(1.8) si perviene al seguente sistema lineare omogeneo:

$$
\begin{aligned}
i\omega\bar{v}_r - 2\Omega\bar{v}_\varphi - \gamma\left(\frac{a^2}{\rho_0}\bar{\rho}' - \bar{U}'\right) + \frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0}\gamma(\gamma\bar{v}_r - ik\bar{v}_z) + \\
+ \frac{\eta}{\rho_0}(ik\gamma\bar{v}_z + k^2\bar{v}_r) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

$$
i\omega\bar{v}_\varphi + 2\Omega\bar{v}_r + \frac{\eta}{\rho_0}(k^2 + \gamma^2)\bar{v}_\varphi = 0,
\tag{1.11}
$$

$$
\begin{aligned}
i\omega\bar{v}_z - ik\left(\frac{a^2}{\rho_0}\bar{\rho}' - \bar{U}'\right) + ik\frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0}(\gamma\bar{v}_r - ik\bar{v}_z) + \\
+ \frac{\eta}{\rho_0}(-\gamma ik\bar{v}_r + \gamma^2\bar{v}_z) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

$$
i\omega\bar{\rho}' + \rho_0(\gamma\bar{v}_r - ik\bar{v}_z) = 0,
\tag{1.13}
$$

$$
(\gamma^2 + k^2)\bar{U}' - 4\pi G\bar{\rho}' = 0.
\tag{1.14}
$$

Eliminando, tramite (1.13) e (1.14), $\bar{\rho}'$ e $\bar{U}'$ da (1.10) e (1.12) si perviene al sistema lineare omogeneo di tre equazioni nelle tre incognite $\bar{v}_r$, $\bar{v}_\varphi$, $\bar{v}_z$ costituito dalla (1.11) e dalle:

$$
\begin{aligned}
\left[i\omega + \frac{i\gamma^2}{\omega}\left(\frac{4\pi G\rho_0}{\gamma^2 + k^2} - a^2\right) + \frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0}\gamma^2 + \frac{\eta}{\rho_0}k^2\right]\bar{v}_r - \\
- 2\Omega\bar{v}_\varphi + \left[\frac{\gamma k}{\omega}\left(\frac{4\pi G\rho_0}{\gamma^2 + k^2} - a^2\right) - ik\gamma\frac{\lambda + \eta}{\rho_0}\right]\bar{v}_z = 0,
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{k\gamma}{i\omega}\left(\frac{4\pi G\rho_0}{\gamma^2 + k^2} - a^2\right) - k\gamma\frac{\lambda + \eta}{\rho_0}\right]\bar{v}_r + \\
+ \left[-\omega - \frac{k^2}{\omega}\left(\frac{4\pi G\rho_0}{\gamma^2 + k^2} - a^2\right) + i\frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0}k^2 + i\frac{\eta}{\rho_0}\gamma^2\right]\bar{v}_z = 0.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Imponendo l'annullamento del determinante di questo sistema e ponendo:

$$\sigma = i\omega \tag{1.17}$$

si giunge alla relazione di dispersione [2]:

$$\sigma^4 + a_1\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_3\sigma + a_4 = 0, \tag{1.18}$$

dove:

$$a_1 = \frac{\lambda + 4\eta}{\rho_0}(\gamma^2 + k^2), \qquad a_2 = M + \frac{\eta}{\rho_0}(\gamma^2 + k^2)^2 \frac{2\lambda + 5\eta}{\rho_0} + 4\Omega^2,$$

$$a_3 = 2M\frac{\eta}{\rho_0}(\gamma^2 + k^2) + 4\Omega^2\left(\frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0}k^2 + \frac{\eta}{\rho_0}\gamma^2\right) + \frac{\eta^2}{\rho_0^2}\frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0}(\gamma^2 + k^2)^3,$$

$$a_4 = \frac{M}{\gamma^2 + k^2}\left[\frac{\eta^2}{\rho_0^2}(k^2 + \gamma^2)^3 + 4\Omega^2 k^2\right]$$

in cui si é posto:

$$M = a^2(\gamma^2 + k^2) - 4\pi G\rho_0 . \tag{1.19}$$

La (1.18) può avere:

1) quattro radici reali σ_1, σ_2, σ_3 e σ_4

2) due radici reali σ_1 e σ_2 e due complesse coniugate σ_3 e $\sigma_4 = \sigma_3^*$

3) quattro radici complesse σ_1, $\sigma_2 = \sigma_1^*$, σ_3 e $\sigma_4 = \sigma_3^*$

e corrispondentemente abbiamo:

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = a_4, \qquad \sigma_1\sigma_2|\sigma_3|^2 = a_4, \qquad |\sigma_1|^2|\sigma_3|^2 = a_4 .$$

Quindi se é $M < 0$ ossia

$$a^2(\gamma^2 + k^2) < 4\pi G\rho_0 \tag{1.20}$$

non si può verificare il caso 3) e almeno una delle radici reali deve essere positiva il che porta, per (1.17), alla instabilità gravitazionale.

Il valore critico k_c del numero d'onda é perciò:

$$k_c = \frac{1}{a}(4\pi G\rho_0 - a^2\gamma^2)^{1/2} \tag{1.21}$$

(2) Da (1.18) facendo $\lambda = \eta = 0$ si ritrova la (22) di [1].

cioé esattamente lo stesso del caso del fluido non viscoso, cfr. [1] Eq. (21) e nota (4). Per tutti i $k < k_c$ si ha dunque instabilità qualunque sia il valore dei parametri Ω, a, ρ_0, λ, η e γ (3).

Esaminiamo ora il comportamento delle perturbazioni per i valori $k > k_c$.

Per $k > k_c$ tutti i coefficienti della (1.18) sono positivi: é verificata così, cfr. L. Derwidué [7] p. 339, una condizione necessaria per la stabilità. Una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità (cioé una condizione che assicura che la (1.18), oltre a non possedere alcuna radice reale positiva, il che si verifica per la regola di Cartesio, ha tutte le radici complesse con parte reale negativa) é data dal criterio di Routh-Hurwitz, cfr. [7] p. 340, che nel caso della (1.18) si traduce nella condizione, cfr. E. G. Routh [8] Art. 287,:

$$a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0. \tag{1.22}$$

Eseguendo i calcoli si riscontra che la (1.22) é soddisfatta per tutti i $k > k_c$ e per qualsiasi valore dei parametri Ω, a, ρ_0, λ, η e γ.

Confrontando i risultati del caso in esame con quelli ottenuti in [1] per il corrispondente caso non dissipativo possiamo quindi concludere che l'intervento della viscosità non altera né il numero d'onda critico, né il fatto che per tutti i $k > k_c$ si ha stabilità.

1.1. Assenza di rotazione.

I risultati del n. 1 sussistono inalterati nel caso di assenza di rotazione, come si deduce da (1.18).

Si osservi che in questo caso la v_φ compare solo nella (1.5), in cui

(3) Per $\gamma = 0$ da (1.9) abbiamo $v_r = v_\varphi = 0$ e

$$v_z = \bar{v}_z e^{i(\omega t - kz)}, \qquad \rho' = \bar{\rho}' e^{i(\omega t - kz)}, \qquad U' = \bar{U}' e^{i(\omega t - kz)}$$

cioé perturbazioni piane ad ampiezza costante, e (1.21) ridà, per il caso in esame, il valore critico di Jeans: $k_c = k_J = (4\pi G\rho_0)^{1/2}/a$. In questo caso é $\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v} = 0$, le (1.4) e (1.5) sono identicamente soddisfatte e la relazione di dispersione risulta:

$$\sigma^2 + \frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0} k^2 \sigma + a^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 = 0$$

da cui si deduce che per tutti i $k < k_c = k_J$ c'é sempre instabilità e per tutti i $k > k_c = k_J$ c'é sempre stabilità.

sono assenti le altre perturbazioni incognite; la (1.5) è perciò disaccopiata e richiedendo ad essa la soluzione $(1.9)_2$ si è condotti alla

$$i\omega = -\frac{\eta}{\rho_0}(k^2 + \gamma^2) \tag{1.23}$$

che dà sempre stabilità.

Il sistema (1.15)-(1.16) conduce alla relazione di dispersione:

$$\sigma^3 + (\gamma^2 + k^2)\frac{\lambda + 3\eta}{\rho_0}\sigma^2 + \tag{1.24}$$

$$+ \left[M + \frac{(\lambda + 2\eta)\eta}{\rho_0^2}(\gamma^2 + k^2)^2\right]\sigma + \frac{\eta}{\rho_0}M(\gamma^2 + k^2) = 0 \quad [4]$$

da cui si deduce ancora che il k_c é dato dalla (1.21) e che per tutti i $k > k_c$ c'é stabilità per qualsiasi valore dei parametri.

2. Influenza di un campo magnetico uniforme.

Supponiamo ora che sia presente un campo magnetico uniforme diretto come l'asse z, di cui con $\boldsymbol{B}_0$ indichiamo il vettore induzione, e che il fluido presenti una conducibilità elettrica χ da considerarsi finita. Posto $\beta = c^2/4\pi\mu\chi$ le equazioni di partenza sono ora (cfr. [2], [3], [4], [5], [6]), la (1.2), la (1.3), la (1.1) con l'aggiunta a secondo membro del termine

$$\frac{1}{4\pi\mu\rho_0}(\text{rot}\,\boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{B}_0$$

e le:

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = \text{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0) + \beta\Delta_2\boldsymbol{b}, \tag{2.1}$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{b} = 0, \tag{2.2}$$

dove $\boldsymbol{b}/\mu$ é la perturbazione nel campo magnetico.

Proiettata su T la (2.1) dà:

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_r}{\partial z} - \beta\left(\frac{\partial^2 b_z}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 b_r}{\partial z^2}\right), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial b_\varphi}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \beta\left\{-\frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r b_\varphi)\right]\right\}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = -\frac{B_0}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) - \beta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial r}\right)\right]. \tag{2.5}$$

[4] Come ovvio la (1.18) con $\Omega = 0$ si spezza nelle (1.23) e (1.24). Per $\lambda = \eta = 0$ si riottiene la $\omega^2 = M$, relazione di dispersione del corrispondente caso non dissipativo, cfr. [1].

Da (2.2) abbiamo

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rb_r) + \frac{\partial b_z}{\partial z} = 0. \tag{2.6}$$

Richiediamo per $\boldsymbol{v}$, U' e ρ' le soluzioni (1.9) e per $\boldsymbol{b}$ le:

$$\begin{aligned} b_r &= \bar{b}_r J_1(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} \\ b_\varphi &= \bar{b}_\varphi J_1(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} \\ b_z &= \bar{b}_z J_0(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

dove $\bar{b}_r$, b_φ, $\bar{b}_z$ sono delle costanti da considerarsi al solito molto piccole.

Il sistema di equazioni lineari omogenee a cui si perviene é costituito dalle (1.12), (1.13) e (1.14) inalterate, dalla (1.10) e (1.11) con l'aggiunta rispettivamente dei termini

$$-\frac{B_0}{4\pi\mu\rho_0}(\gamma\bar{b}_z - ik\bar{b}_r) \quad \text{e} \quad \frac{B_0 ik}{4\pi\mu\rho_0}\bar{b}_\varphi,$$

e dalle

$$i\omega\bar{b}_r + B_0 ik\bar{v}_r + \beta(i\gamma k\bar{b}_z + k^2\bar{b}_r) = 0, \tag{2.8}$$

$$i\omega\bar{b}_\varphi + ikB_0\bar{v}_\varphi + \beta(k^2 + \gamma^2)\bar{b}_\varphi = 0, \tag{2.9}$$

$$i\omega\bar{b}_z + \gamma B_0\bar{v}_r + \beta(-\gamma ik\bar{b}_r + \gamma^2\bar{b}_z) = 0, \tag{2.10}$$

$$\gamma\bar{b}_r - ik\bar{b}_z = 0, \tag{2.11}$$

che discendono da (2.3)-(2.6).

Da (2.8) e (2.10) eliminando $\bar{v}_r$ si ottiene (2.11) che quindi si tralascia.

Eliminando $\bar{b}_\varphi$, $\bar{\rho}'$ e $\bar{U}'$ tramite (2.9), (1.13) e (1.14), si perviene al sistema lineare omogeneo di cinque equazioni in $\bar{v}_r$, $\bar{v}_\varphi$, $\bar{v}_z$, $\bar{b}_r$ e $\bar{b}_z$ costituito dalle (2.8) e (2.10), dalla (1.16) inalterata, dalla (1.15) con l'aggiunta dei termini

$$\frac{ikB_0}{4\pi\mu\rho_0}\bar{b}_r - \frac{\gamma B_0}{4\pi\mu\rho_0}\bar{b}_z$$

e dalla (1.11) con l'aggiunta del termine $\dfrac{A^2k^2}{\beta(k^2+\gamma^2)+i\omega}\,\bar{v}_\varphi$ dove A^2 é il quadrato della velocità di ALFVÉN.

Imponendo l'annullamento del determinante di questo sistema, si perviene alla equazione di dispersione a coefficienti reali:

$$\sigma^6 + c_1\sigma^5 + c_2\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_4\sigma^2 + c_5\sigma + c_6 = 0 \tag{2.12}$$

dove

$$c_6 = M\left\{4\Omega^2k^2\beta^2(k^2+\gamma^2) + \left[A^2k^2 + \frac{\eta}{\rho_0}\beta(k^2+\gamma^2)^2\right]^2\right\},$$

in cui M é dato dalla (1.19).

Con le stesse considerazioni usate per la (1.18) si riconosce che, per qualunque valore dei parametri Ω, a, ρ_0, γ, λ, η, A e β, il numero d'onda critico é ancora dato dalla (1.21) e che per tutti i $k < k_c$ si ha instabilità sia nel caso con $\Omega \neq 0$ che in quello con $\Omega = 0$. Inoltre ciò accade anche nei due casi particolari che si possono presentare: fluido viscoso con $\beta = 0$ e fluido non viscoso con $\beta \neq 0$, sia per $\Omega \neq 0$ che per $\Omega = 0$.

Per quanto riguarda il comportamento per i $k > k_c$ i coefficienti c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 della (2.12), la cui espressione esplicita, facilmente calcolabile, non si riporta qui per brevità, sono tali che, nel caso generale, i calcoli necessari per la applicazione della condizione di ROUTH-HURWITZ sono apparsi troppo complicati per essere effettuati in modo diretto.

2.1. Assenza di rotazione.

In questo caso v_φ e b_φ sono disaccopiate dalle altre perturbazioni, come risulta dalla (1.5) (cui va aggiunto a secondo membro il termine $\frac{B_0}{4\pi\mu\rho_0}\frac{\partial b_\varphi}{\partial z}$) e dalla (2.4).

Da queste equazioni si é condotti alla relazione di dispersione:

$$\sigma^2 + \left(\beta + \frac{\eta}{\rho_0}\right)(k^2+\gamma^2)\sigma + A^2k^2 + \beta\frac{\eta}{\rho_0}(k^2+\gamma^2)^2 = 0. \tag{2.13}$$

La (2.13), che in assenza di fenomeni dissipativi descrive onde di ALFVÉN pure propagantesi lungo l'asse z, dà stabilità per ogni valore di k, come si riconosce facilmente. Per le rimanenti perturbazioni si é condotti alla relazione di dispersione:

$$\sigma^4 + d_1\sigma^3 + d_2\sigma^2 + d_3\sigma + d_4 = 0 \quad (^5) \tag{2.14}$$

(5) La (2.12) con $\Omega = 0$ si spezza, come naturale, in (2.13) e (2.14).

dove:

$$d_1 = (\gamma^2 + k^2)\left(\beta + \frac{\lambda + 3\eta}{\rho_0}\right),$$

$$d_2 = M + A^2(\gamma^2 + k^2) + (\gamma^2 + k^2)^2\left(\frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0}\frac{\eta}{\rho_0} + \frac{\lambda + 3\eta}{\rho_0}\beta\right),$$

$$d_3 = (\gamma^2 + k^2)\left[M\left(\beta + \frac{\eta}{\rho_0}\right) + A^2\left(\frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0}k^2 + \frac{\eta}{\rho_0}\gamma^2\right) + \beta(\gamma^2 + k^2)^2\frac{\eta}{\rho_0}\frac{\lambda + 2\eta}{\rho_0}\right],$$

$$d_4 = M\left[A^2k^2 + \beta\frac{\eta}{\rho_0}(\gamma^2 + k^2)^2\right].$$

La (2.14) riconferma che il k_c é dato ancora da (1.21).

Si riscontra poi, eseguendo i calcoli, che la condizione di ROUTH-HURWITZ, analoga alla (1.22), relativa a (2.14) é soddisfatta per tutti i $k > k_c$ e per qualsiasi valore dei parametri a, ρ_0, γ, λ, η, β, A.

3. Conclusioni (6).

L'intervento degli effetti dissipativi dovuti alla viscosità ed alla conducibilità elettrica finita:

I) non altera in nessun caso il valore del numero d'onda critico k_c che si aveva in assenza di dissipazione, né il fatto che per tutti i $k < k_c$, qualunque sia il valore dei parametri che caratterizzano la natura fisica del problema, c'é in tutti i casi possibili instabilità.

II) non altera il fatto che in tutti e tre i casi

1°) $B_0 = 0, \quad \Omega = 0$

2°) $B_0 = 0, \quad \Omega \neq 0$

3°) $B_0 \neq 0, \quad \Omega = 0$

si ha, come accadeva (cfr. [1]) in assenza di dissipazione, stabilità per tutti i $k > k_c$ qualsiasi sia il valore dei parametri (7).

(6) Osserviamo che nel giungere a queste conclusioni non si é fatto uso, a differenza degli Autori di [2] e [4], della relazione di STOKES fra λ ed η. Tali conclusioni sussistono, in particolare, nel caso di fluidi per i quali sia lecito adottare la suddetta relazione (per una discussione sulla validità di questa relazione cfr. per es. J. SERRIN [9] Sect. 62).

(7) Anche le perturbazioni piane ad ampiezza costante presentano un comportamento analogo a quello trovato per k_c: infatti in [2], [3] e [4], esaminando il caso $\boldsymbol{k} = (0, 0, k)$, $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega, 0, 0)$, $\boldsymbol{B}_0 = (0, B_{0y}, B_{0z})$, gli Autori giungono alla conclusione che il numero d'onda critico k_j non viene alterato dalla presenza dei suddetti fenomeni dissipativi.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. MATTEI, *Sulla instabilità magnetogravitazionale di un mezzo comprimibile in rotazione uniforme*. Nota I, « Boll. U.M.I. », 22, 1967, pp. 301-310.

[2] A. G. PACHOLCZYK, J. S. STODOLKIEWICZ, *The magnetogravitational instability of an infinite homogeneous medium when a Coriolis force is acting and viscosity is taken into account*, « Bull. Acad. Polon. Sc. », VII, 7, 1959, p. 429-434.

[3] — —, *The magnetogravitational instability of the medium of finite electrical conductivity*, « Bull. Acad. Polon. Sc. », VII, 11, 1959, p. 681-685.

[4] K. KOSSACKI, *On the magnetogravitational instability of a homogeneous, infinite, viscous and rotating medium with finite electrical conductivity*, « Acta Astronomica », 11, 2, 1961, p. 83-86.

[5] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford 1961.

[6] S. CHANDRASEKHAR, E. FERMI, *Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field*, « Astrophy. J. », 118, 1953, p. 116-141.

[7] L. DERWIDUÉ, *Introduction a l'algèbre supérieure et au calcul numérique algébrique*, Masson, Paris, 1957.

[8] E. G. ROUTH, *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, 6ª Ed. Dover 1955.

[9] J. SERRIN, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, « Hand. der Phy. », VIII/1, 1959.

Pervenuto alla Segreteria dell' U. M. I.
il 14 febbraio 1967