Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Geymonat

Osservazioni su un teorema di prolungamento di R. T. Seeley.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.2, p. 247–254.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_2_247_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Osservazioni su un teorema di prolungamento di R. T. Seeley

GIUSEPPE GEYMONAT (Pavia) (*)

Sunto. - *Adattando un ragionamento di Seeley* [4] *si costruisce un prolungamento* $u \to Pu$ *lineare e continuo da* $W^{k,p}(\Omega)$ *in* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ *per ogni* k *reale positivo o negativo,* $k+\frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \ldots, 1 < p < +\infty$.

Introduzione.

In molte questioni connesse con lo studio delle equazioni a derivate parziali si incontrano operatori $u \to P_N u$ lineari e continui da $W^{k,p}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ (¹) tali che $[P_N u]|_\Omega = u$ (k intero, $0 \leq k \leq N$, $1 \leq p < \infty$, N intero ≥ 1 fissato, Ω aperto di frontiera regolare).

Recentemente R. T. SEELEY [4] ha costruito un operatore di prolungamento $u \to Pu$ che è lineare e continuo per ogni k intero ≥ 0 (e quindi per interpolazione per ogni k reale ≥ 0).

D'altro lato è noto (v. ad es. BAIOCCHI [1], LIONS-MAGENES [2], ...) che si può costruire un operatore $u \to P_N u$ lineare e continuo da $W^{k,p}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ per $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$, $1 < p < +\infty$.

In questa nota si dimostra che adattando opportunamente il ragionamento di R. T. SEELEY [4] si può costruire un prolungamento $u \to Pu$ lineare e continuo per ogni k reale positivo o negativo con $k + \frac{1}{p} \neq 0, -1, -2, \ldots, 1 < p < +\infty$.

Siccome il problema ha carattere locale è sufficiente costruire l'operatore nel caso $\Omega = \boldsymbol{R}^n_+ = \{(x, t) \in R^n;\ t > 0\}$

1. LEMMA 1. - *Esistono due successioni* $\{a_k\}_{k \in Z}$, $\{b_k\}_{k \in Z}$ tali che:

(i) $b_k < 0$ *per ogni* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(ii) $b_k \to -\infty$ *per* $k \to +\infty$, $b_0 = 1$, $b_{-k} \to 0$ *per* $k \to +\infty$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(¹) Per k intero ≥ 0, $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}(\Omega)$, risp. $W^{k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ è lo spazio di SOBOLEV delle (classi di) funzioni di potenza p-esima sommabile in Ω, risp. in $\boldsymbol{R}^n$, insieme con le derivate, nel senso delle distribuzioni, di ordine $\leq k$.

(iii) *per ogni* $n \in \boldsymbol{Z}$ *è* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|\,|b_k|^n = M_n < +\infty$

(iv) *per ogni* $n \in \boldsymbol{Z}$ *è* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (b_k)^n = 1$.

DIMOSTRAZIONE. - Si ponga come in SEELEY [4] $b_k = -2^k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Sia poi per N fissato ≥ 1, a_{kN}, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$ la soluzione del sistema di equazioni lineari

$$\sum_{k=-N}^{N} X_k (b_k)^n = 1 \qquad n = -N, -N+1, \ldots, 0, \ldots, N. \tag{1}$$

Tale sistema ammette una ed una sola soluzione che, applicando la regola di CRAMER e lo sviluppo dei determinanti di VANDERMONDE, è data dalle seguenti formule

$$a_{-kN} = A_{-k} B_{-kN} \qquad k = 1, \ldots, N$$

$$a_{kN} = A_k B_{kN} \qquad k = 0, 1, \ldots, N$$

dove

$$A_{-k} = -\frac{1}{2} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1+2^i}{2^i - 2^k} \qquad k = 1, \ldots, N$$

$$A_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1+2^i}{2^i - 2^k} \qquad k = 0, 1, \ldots, N$$

$$B_{-kN} = \prod_{i=k+1}^{N} \frac{1+2^i}{2^i - 2^k} \prod_{i=0}^{N} \frac{(1+2^i)2^k}{2^{k+i} - 1} \qquad k = 1, \ldots, N$$

$$B_{kN} = \prod_{i=k+1}^{N} \frac{1+2^i}{2^i - 2^k} \prod_{i=1}^{N} \frac{(1+2^i)2^k}{2^{k+i} - 1} \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Si ha allora

$$|A_{-k}| \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{k-1} 2^{i-k+1} = 2^{-(k^2-3k+4)/2}$$

e siccome B_{-kN} è ≥ 0 si ha

$$\log(B_{-kN}) = \sum_{i=k+1}^{N} \log\left(1 + \frac{1+2^k}{2^i - 2^k}\right) + \sum_{i=0}^{N} \log\left(1 + \frac{(1+2^k)}{2^{i+k} - 1}\right) < 12$$

ed analogamente

$$|A_k| \leq 2^{-(k^2-k)/2}$$

$$\log(B_{kN}) < 8.$$

Fissato k le successioni, dell'indice N, $\{B_{-kN}\}_{N=1,2,\ldots}$ $\{B_{kN}\}_{N=1,2,\ldots}$ sono monotone crescenti e quindi convergono a $B_{-k}\leq e^{12}$ ed a $B_k\leq e^8$.

Ponendo per $k\in \boldsymbol{Z}$ $a_k = A_k\ B_k$, risulta

$$|a_{-k}|\leq e^{12}2^{-(k^2-3k+4)/2} \qquad k=1,\,2,\,\ldots$$

$$|a_k| < e^8 2^{-(k^2-k)/2} \qquad k=0,\,1,\,\ldots$$

per cui la (iii) è verificata.

Si definisca

$$a_{kN} = A_k B_{kN} \qquad \text{per} \quad k=0,\,\pm 1,\,\ldots,\,\pm N$$

$$a_{kN} = 0 \qquad \text{per} \quad |k|\geq N+1$$

allora risulta in virtù di (1)

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{kN}(b_k)^n = 1 \qquad \text{per ogni} \quad n\in \boldsymbol{Z}. \tag{2}$$

Per verificare (iv) è ora sufficiente provare che

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{kN}(b_k)^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(b_k)^n;$$

quest'ultimo fatto segue dalla maggiorazione $|a_{kN}|\,|b_k|^n\leq |a_k|\,|b_k|^n$ e da (iii). c.v.d.

Si può ora dimostrare il seguente teorema che estende quello di SEELEY [4].

TEOREMA 1. – *Siano assegnate due successioni* $\{a_k\}_{k\in Z}$, $\{b_k\}_{k\in Z}$ *che verificano il lemma* 1 *e sia* $t\to\varphi(t)$ *una fissata funzione indefinitamente derivabile con* $\varphi(t)=1$ *per* $|t|\leq 1$, $\varphi(t)=0$ *per* $|t|\geq 2$ *e* $\varphi(t)\in[0,\,1]$ *per* $t\in R$. *Allora:*

(i) *data* $f\in \boldsymbol{C}_0^\infty(\overline{\boldsymbol{R}^n_+})$ (2) *e posto*

$$Pf(x,\,y)=\begin{cases} f(x,\,t) & \text{per} \quad t\geq 0\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi(b_k^2t)f(x,\,b_kt)+\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\varphi(b_{-k}^{-1}t)f(x,\,b_{-k}t) & \text{per} \quad t<0\end{cases} \tag{3}$$

risulta $Pf\in \boldsymbol{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ (3)

(2) $\overline{\boldsymbol{R}^n_+}=\{(x,\,t)\in \boldsymbol{R}^n;\ t\geq 0\}$, $C_0^\infty(\overline{\boldsymbol{R}^n_+})$ è lo spazio delle u indefinitamente derivabili in $\overline{\boldsymbol{R}^n_+}$ ed a supporto compatto in $\overline{\boldsymbol{R}^n_+}$.

(3) $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ è lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili in $\boldsymbol{R}^n$ ed a supporto compatto.

(ii) *data* $\psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ *e posto*

$$R\psi(x,\ t) = \begin{cases} 0 \quad \text{per} \quad t \leq 0 \\ \psi(x.\ t) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} b_{-k}^{-1} \varphi(b_{-k}^2 t) \psi(x,\ b_{-k}^{-1} t) - \\ \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^{-1} \varphi(b_k t) \cdot \psi(x,\ b_k^{-1} t) \quad \text{per} \quad t > 0 \end{cases}$$

risulta $R\psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$;

(iii) *per ogni* $f \in C_0^\infty(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$, $\psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ *posto* $S\psi = [R\psi]_{|\overline{R_+^n}}$ *risulta*

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} Pf\bar{\psi}dxdt = \int_{\boldsymbol{R}_+^n} f\overline{S\psi}dxdt.$$

DIMOSTRAZIONE. - (i) Si osservi innanzitutto che $(Pf)(x,\ t)$ è bene definita per $t < 0$; infatti è $(Pf)(x,\ t) = 0$ per $t \leq -2$; inoltre posto per $t \in [-2,\ 0[$:

$$k_0(t) = \inf \left\{ k \geq 0;\ b_k^2 \geq -\frac{2}{t} \right\}$$

$$k_1(t) = \inf \left\{ k \geq 1,\ b_{-k} \geq \frac{1}{2} t \right\}$$

risulta $k_0(t),\ k_1(t) < +\infty$ e si ha per tali t:

$$(Pf)(x,\ t) = \sum_{k=0}^{k_0(t)} a_k \varphi(b_k t) f(x,\ b_k t) + \\ + \sum_{k=1}^{k_1(t)} a_{-k} \varphi(b_{-k}^{-1} t) f(x,\ b_{-k} t).$$

Si ponga ora $L = \max\limits_{(x,t) \in \overline{R_+^n}} |f(x,\ t)|$, allora si ha per ogni $(x,\ t) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times [-2,\ 0[$

$$|(Pf)(x,\ t)| \leq LM_0;$$

inoltre per la (ii) del lemma 1 risulta

$$|(Pf)(x,\ t) - f(x,\ 0| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |\varphi(b_k^2 t) f(x,\ b_k t) - f(x,\ 0)| + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{-k}| |\varphi(b_{-k}^{-1} t) f(x,\ b_{-k} t) - f(x,\ 0)|.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste allora un k_ε tale che

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{8L}, \qquad \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} |a_{-k}| < \frac{\varepsilon}{8L}$$

ed esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $(x, t) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times]-\delta_\varepsilon, 0[$ sia

$$|\varphi(b_k^2 t) f(x, b_k t) - f(x, 0)| < \frac{\varepsilon}{4M_0} \quad \text{per} \quad k = 0, +1, \ldots, +k_\varepsilon$$

$$|\varphi(b_{-k}^{-1} t) f(x, b_{-k} t) - f(x, 0)| < \frac{\varepsilon}{4M_0} \quad \text{per} \quad k = 1, 2, \ldots, k_\varepsilon$$

e dunque risulta per ogni $(x, t) \in R^{n-1} \times]-\delta_\varepsilon, 0[$

$$|(Pf)(x, t) - f(x, 0| < \varepsilon.$$

In modo analogo si prova, posto $L_m = \max\limits_{|\mu|+\nu \leq m} \max\limits_{(x,t) \in \overline{\boldsymbol{R}_+^n}} |D_x^\mu D_t^\nu f(x, t)|$, che vale la seguente maggiorazione

$$|(D_x^\mu D_t^\nu Pf)(x, t)| \leq L_{|\mu|+\nu} \left\{ M_\nu + \sum_{j=i}^{\nu} \binom{\nu}{j} (M_{\nu+j} + M_{\nu-2j}) \right\};$$

infine tenendo conto della definizione di $\varphi(t)$ si prova che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un δ_3 tale che per ogni $(x, t) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times]-\delta_\varepsilon, 0[$ si ha

$$|D_x^\mu D_t^\nu Pf)(x, t) - (D_x^\mu D_t^\nu f)(x, 0)| < \varepsilon.$$

In conclusione si ha $Pf \in \boldsymbol{C}_0^\infty(R^n)$; inoltre le serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi(b_k^2 t) f(x, b_k t), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \varphi(b_{-k}^{-1} t) f(x, b_{-k} t)$$

convergono uniformemente in $R^{n-1} \times [-2, 0]$, insieme alle serie delle derivate.

(ii) Il ragionamento è analogo a quello svolto in (i). Innanzitutto si ha per ogni $(x, t) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \times [2, +\infty[$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} b_{-k}^{-1} \varphi(b_{-k}^{-2} t) \psi(x, b_{-k}^{-1} t) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^{-1} \varphi(b_k t) \psi(x', b_k^{-1} t) = 0;$$

inoltre come in (i) si verifica che per ogni $(x, t) \in R^{n-1} \times]0, 2]$ risulta

$$(R\psi)(x, t) = \psi(x, t) - \sum_{k=1}^{\widetilde{k}_1(t)} a_{-k} b_{-k}^{-1} \varphi(b_{-k}^{-2} t) \psi(x, b_{-k}^{-1} t) -$$

$$- \sum_{k=0}^{\widetilde{k}_0(t)} a_k b_k^{-1} \varphi(b_k t) \psi(x, b_k^{-} t)$$

dove $\tilde{k}_1(t) = \inf \left\{ k \geq 1;\ b^2_{-k} \leq \frac{t}{2} \right\}$, $\tilde{k}_0(t) = \inf \left\{ k \geq 0;\ b_k \leq -\frac{2}{t} \right\} <$ $< +\infty$ e quindi

$$|(R\psi)(x,\ t)| \leq \max_{(x,t)\in R^n} |\psi(x,\ t)|\,\{1 + M_{-1}\}.$$

Il ragionamento prosegue poi come in (i); in conclusione risulta $R\psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ ed inoltre le serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} b_{-k}^{-1} \varphi(b_{-k}^{-2} t)\psi(x,\ b_{-k}^{-1} t), \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k^{-1} \varphi(b_k t)\psi(x,\ b_k^{-1} t)$$

convergono uniformemente in $\boldsymbol{R}^{n-1} \times [0,\ 2]$ insieme alle serie delle derivate.

(iii) Basta eseguire le integrazioni ed applicare i risultati noti sull'integrazione delle serie uniformemente convergenti.

c.v.d.

Corollario 1. – *L'operatore $f \to Pf$ definito per $f \in C_0^\infty(\overline{\boldsymbol{R}^n_+})$ può essere prolungato per continuità ad un operatore lineare e continuo ancora indicato $f \to Pf$ da $W^{k,p}(\boldsymbol{R}^n_+)$ in $W^{k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ per ogni k intero ≥ 0, $1 < p < +\infty$.*

Dimostrazione. – Basta osservare che

$$\left(\int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} |(Pf)(x,\ t)|^p\, dx dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} \Big| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi(b_k^2 t) f(x,\ b_k t) \Big|^p dx dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \varphi(b_{-k}^{-1} t) f(x,\ b_{-k} t) \Big|^p dx dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left(\int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} |f(x.\ b_k t)|^p\, dx dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{-k}| \left(\int_{R^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} |f(x,\ b_{-k} t)|^p\, dx dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,|b_k|^{-1/p}\, \|f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n_+)} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_{-k}|\,|b_{-k}|^{-1/p}\, \|f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n_+)} \leq$$

$$\leq (M_0 + M_{-1})\, \|f\|_{L^p(\boldsymbol{R}^n_+)}.$$

In modo analogo si procede per le derivate successive. c.v.d.

Con ragionamento simile si prova il seguente risultato.

COROLLARIO 2. - *L'operatore* $\psi \to S\psi$ *definito per* $\psi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ *può essere prolungato per continuità ad un operatore lineare e continuo ancora indicato* $\psi \to S\psi$ *da* $W^{k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ *in* $\mathring{W}^{k,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ (4) *per* k *intero* ≥ 0, $1 < p < +\infty$.

Per trasposizione risulta per ${}^tS$ lineare e continuo da $W^{-k,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ in $W^{-k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ per k intero ≥ 0, $1 < p < +\infty$, dove ${}^tS$ è definito da

$$< {}^tSu,\ \overline{\psi} >_{W^{-k,p}(\boldsymbol{R}^n),W^{k,p'}(\boldsymbol{R}^n)} = < u,\ \overline{S\psi} >_{W^{-k,p}(\boldsymbol{R}_+^n),\ \mathring{W}^{k,p'}(\boldsymbol{R}_+^n)}$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, inoltre se $u \in C_0^\infty(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$ risulta per il teorema 1, (iii) ${}^tSu = Pu$ e quindi per la densità di $C_0^\infty(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$ in $W^{-k,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ si può prolungare $u \to Pu$ definito per $u \in C_0^\infty(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$ dalla (3) ad un operatore lineare e continuo, ancora indicato $u \to Pu$ da $W^{-k,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ in $W^{-k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ per ogni k intero ≥ 0, $1 < p < +\infty$.

In modo analogo è ${}^tP$ lineare e continuo da $W^{-k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ in $W^{-k,p}_{\overline{\boldsymbol{R}_+^n}}(\boldsymbol{R}^n)$ e siccome su $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ è ${}^tP = S$ allora S può essere prolungato per continuità in un operatore lineare e continuo da $W^{-k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ in $W^{-k,p}_{\overline{\boldsymbol{R}_+^n}}(\boldsymbol{R}^n)$ per k intero ≥ 0, $1 < p < +\infty$.

Per k reale si usa con ragionamento abituale l'interpolazione; in conclusione si è dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA 2. - *L'operatore* $u \to Pu$ *definito per* $u \in C_0^\infty(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$ *dalla* (3) *può essere prolungato in un operatore ancora indicato* $u \to Pu$ *lineare e continuo da* $W^{k,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ *in* $W^{k,p}(\boldsymbol{R}^n)$ *per ogni* k *reale*, $1 < p < +\infty$, $k + \frac{1}{p} \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Indicati con $W^{-\infty,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$, risp. $W^{-\infty,p}(\boldsymbol{R}^n)$ gli spazi $\bigcup_{s \leq 0} W^{s,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$, risp. $\bigcup_{s \leq 0} W^{s,p}(\boldsymbol{R}^n)$, muniti della naturale topologia di limite induttivo (5) si ricava dal teorema 2 che *l'operatore* $u \to Pu$ *è lineare e continuo da* $W^{-\infty,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ *in* $W^{-\infty,p}(\boldsymbol{R}^n)$.

(4) $\mathring{W}^{k,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ è la chiusura in $W^{k,p}(\boldsymbol{R}_+^n)$ dello spazio delle funzioni indefinitamente derivabili in $\boldsymbol{R}_+^n$ ed a supporto compatto contenuto in $\boldsymbol{R}_+^n$.

(5) Tali spazi in SCHWARTZ [3] cap. VI; § 8 sono indicati con $\mathfrak{D}'_{L^p}(\boldsymbol{R}_+^n)$, risp. $\mathfrak{D}'_{L^p}(\boldsymbol{R}^n)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BAIOCCHI, *Sul problema misto per l'equazione parabolica del tipo del calore*, Rend. Sem. Mat., Padova 36, (1966), pp. 80-121.

[2] J. L. LIONS-E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications* (libro in preparazione).

[3] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions,* Tome II, 2ª ed., Hermann, Paris, (1957).

[4] R. T. SEELEY, *Extension of C^∞ functions defined in a half space*, Proc. Am. Math. Soc., 15 (1964), pp. 625-626.

Pervenuta al'a Segreteria dell'U.M.I.
il 15 marzo 1967