Bollettino Unione Matematica Italiana

Claudio Baiocchi

Su un sistema di equazioni funzionali connesso alla teoria dell'informazione.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.2, p. 236–246.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_2_236_0>

Su un sistema di equazioni funzionali connesso alla teoria dell'informazione

CLAUDIO BAIOCCHI (a Pavia) (*)

Résumé. - *On donne un théorème d'existence et unicité pour un système d'équations fonctionnelles lié à la théorie axiomatique de l'Information.*

Introduzione

Nella costruzione assiomatica della teoria dell'informazione data di recente da J. KAMPE DE FERIET e B. FORTE (1) si presenta tra l'altro il problema di determinare gli «operatori universali» che leghino il valore dell'informazione relativa all'unione di due eventi indipendenti alle informazioni degli eventi stessi. Il problema, per mezzo di opportune trasformazioni, si può riportare allo studio di un sistema di due equazioni funzionali (cfr. (1.2), (1.3) seguenti) corredate da opportune condizioni (cfr. (1.1), (1.4), (1.6) seguenti).

In questo lavoro viene dato un teorema di esistenza e unicità relativo a tale problema; questo teorema in particolare serve a dimostrare l'unicità «dell'operatore universale» connesso alla teoria dell'informazione; esso appare d'altronde anche di per sé interessante in relazione alle equazioni funzionali che generalizzano la ben nota «equazione di CAUCHY» (2).

Desidero ringraziare B FORTE per avermi indicato questa ricerca.

1. Sia ψ una funzione reale di una variabile reale che soddisfi i seguenti assiomi:

$$u \longrightarrow \psi(u) \in C^0(R^1) \quad (3) \tag{1.1}$$

$$\psi(u + \psi(v)) - \psi(u) = \psi(v + \psi(u)) - \psi(v) \qquad \forall u,\ v \in R^1 \tag{1.2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Gruppi di Ricerca del Comitato per la Matematica del C.N R.

(1) Cfr J. KAMPÉ DE FERIET, B. FORTE, in corso di pubblicazione.

(2) Cfr. ad es. J. ACZEEL, *Lectures on functional equations*, Academic Press, N. Y. 1966.

(3) R^1 indica la retta reale: $-\infty < u < +\infty$; $C^k(R^1)$ (k intero ≥ 0) indica lo spazio delle funzioni $u \longrightarrow f(u)$ definite su R^1, a valori reali, continue con le derivate fino all'ordine k incluso.

$$\psi(-u) = \psi(u) + u \qquad \forall u \in R^1 \tag{1.3}$$

$$\lim_{u \to -\infty} \psi(u) = 0 \tag{1.4}$$

Ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 1 - *Fissati ad arbitrio* u_0, $\psi_0 \in R^1$ *tali che:*

$$\psi_0 \leq -\frac{1}{2}\{u_0 + |u_0|\} \tag{1.5}$$

esiste una ed una sola ψ *che soddisfa le* (1.1), (1.2), (1.3), (1 4) *e la relazione* $\psi(u_0) = \psi_0$.

OSSERVAZIONE 1. - La restrizione (1.5) su $\psi_0 = \psi(u_0)$ è necessaria in quanto come si vedrà al N. 2, le (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) implicano la relazione:

$$\psi(u) \leq -\frac{1}{2}\{u + |u|\} \qquad \forall u \in R^1 \tag{1.6}$$

La dimostrazione che daremo del teorema 1 sarà basata sulle seguenti considerazioni: si ponga, per ogni k reale positivo:

$$\psi_k(u) = -\frac{1}{2}\left\{u + \frac{1}{k}\log 2 \cosh ku\right\} \qquad \forall u \in R^1 \tag{1.7}$$

e si ponga anche $\psi_\infty(u) = \lim_{k \to +\infty} \psi_k(u)$ $\forall u \in R^1$; si ha con facili calcoli:

$$\psi_\infty(u) = -\frac{1}{2}\{u + |u|\} \qquad \forall u \in R^1. \tag{1.8}$$

Si possono dimostrare [4] le seguenti relazioni:

(1 9) *Per ogni* $k \in]0, +\infty]$ $\psi_k(u)$ *verifica le* (1.1), (1 2), (1.3), (1.4)

(1.10) *Fissati ad un arbitrio* u_0, $\psi_0 \in R^1$ *tali che valga la* (1.5) *esiste uno ed un solo* $k_0 \in]0, +\infty]$ *tale che* $\psi_{k_0}(u_0) = \psi_0$

(1.11) *Se* $\psi \in C^2(R^1)$ *verifica le* (1.2), (1.3), (1.4) ψ *è necessariamente del tipo* (1.7) *per* $k \in]0, +\infty[$ *opportuno.*

[4] Cfr. J. KAMPE DE FERIET, B. FORTE, in corso di pubblicazione

Per dimostrare il teorema 1 sarà allora sufficiente dimostrare che le (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) e la relazione

$$\psi(u) \neq \psi_\infty(u) \tag{1.12}$$

implicano la validità della relazione:

$$u \longrightarrow \psi(u) \in C^2(R^1) \tag{1.13}$$

ed è appunto tale relazione che noi dimostreremo.

Introduciamo alcune definizioni che avremo occasione di usare. Se $y = f(x)$ è una funzione reale di una variabile reale indicheremo con $D(f)$ il «dominio di definizione», o «campo di esistenza» di f, cioè l'insieme degli $x \in R^1$ tali che $f(x)$ è definita; con $R(f)$ indicheremo il «rango» o «codominio» di f, cioè l'insieme $\{f(x);\ x \in D(f)\}$. Indicheremo infine con $f'_+(x)$ ed $f'_-(x)$ rispettivamente le derivate unilaterali destra e sinistra di f nel punto x e cioè (supponiamo per semplicità $D(f) = R^1$; è questo il solo caso che ci interessa) le espressioni definite rispettivamente da

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}; \qquad f'_-(x) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Faremo uso del ben noto teorema di LEBESGUE sulla derivabilità delle funzioni monotone cioè:

(1.14) *Se f è monotona* $\mu(R^1 - D(f')) = 0$

(μ essendo la misura di LEBESGUE; supponiamo ancora $D(f) = R^1$); e sfrutteremo infine i seguenti ben noti risultati:

(1.15) *Se f'_+ (ovvero f'_-) esiste ed è negativa in un intervallo la funzione $y = f(x)$ decresce in tale intervallo.*

(1.16) *Se f'_+ (ovvero f'_-) esiste ed è continua in un intervallo la funzione $y = f(x)$ è derivabile in tale intervallo.*

(ed ovviamente $f' = f'_+ = f'_-$ in tale intervallo).

Si osservi che, facendo uso dei quattro numeri derivati del DINI, si potrebbero evitare alcune delle difficoltà che si presenteranno facendo uso soltanto delle derivate a destra ed a sinistra; abbiamo tuttavia preferito evitare l'uso di tale strumento perchè l'esposizione che così ne risulta ci è sembrata più chiara.

In tutto questo lavoro ψ *indicherà una generica funzione che verifichi le* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.12); *e tali ipotesi non saranno più richiamate.*

2. Cominciamo ad osservare che le (1.3), (1.4) implicano:

$$\lim_{u \to +\infty} |\psi(u) + u| = 0; \quad \lim_{u \to +\infty} \psi(u) = -\infty \tag{2.1}$$

e dovendo essere, per la (1.1):

$$R(\psi) \text{ è connesso} \tag{2.2}$$

si avrà, per le (1.4), (2.1)

$$R(\psi) \supseteq]-\infty, 0[. \tag{2.3}$$

Dimostriamo ora il seguente lemma:

LEMMA 1. - *Se in un punto* u_0 *si ha* $\psi(u_0) \neq 0$ *nella semiretta* $[u_0, +\infty[$ ψ *è decrecente.*

DIM. - Siano per assurdo u_1, $u_2 \in R^1$ tali che $\psi(u_1) \leq \psi(u_2)$; e $u_0 \leq u_1 < u_2$; dimostriamo che, contro l'ipotesi $\psi(u_0) \neq 0$, si ha:

$$\psi(u) = 0 \qquad \forall u \in]-\infty, u_2[. \tag{2.4}$$

È ovviamente sufficiente supporre $\psi(u_1) = \psi(u_2)$ (5); scrivendo la (1.2) sia con $u = u_1$ sia con $u = u_2$ e confrontando le espressioni che ne risultano si ottiene:

$$\psi(u_1 + \psi(v)) = \psi(u_2 + \psi(v)) \qquad \forall v \in R^1 \tag{2.5}$$

Dimostriamo ora che si ha

$$\psi(u + u_1 - u_2) = \psi(u) \qquad \forall u \in]-\infty, u_2[. \tag{2.6}$$

Infatti se $u < u_2$ per la (2.3) esisterà $\bar{v} \in R^1$ tale che $\psi(\bar{v}) = u - u_2$; ne segue $u = u_2 + \psi(\bar{v})$; $u + u_1 - u_2 = u_1 + \psi(\bar{v})$; scrivendo la (2.5)

(5) Se fosse $\psi(u_1) < \psi(u_2)$ basterebbe sostituire u_2 con un opportuno $\bar{u}_2$ tale che $\bar{u}_2 > u_2$, $\psi(\bar{u}_2) = \psi(u_1)$; un tale $\bar{u}_2$ esiste perchè, per le (1.1), (2.1), in $]u_2 + \infty[$ ψ assume almeno una volta (tutti i valori minori di $\psi(u_2)$ quindi) il valore $\psi(u_1)$.

con $v = \bar{v}$ si ottiene la (2.6). La (2.6) implica che nella semiretta $]-\infty, u_2[$ ψ è periodica di periodo $u_1 - u_2$; e ciò, insieme alla (1.4) implica la (2.4). c.v.d.

Corollario 1. - *Vale la relazione* (1.6).

Dim. - Cominciamo ad osservare che si ha:

$$\psi(u) \leq 0 \qquad \forall u \in R^1. \tag{2.7}$$

Infatti se esistesse un $u_1 \in R^1$ con $\psi(u_1) > 0$ per le (1.1), (1.4) esisterebbe $u_0 < u_1$ con $\psi(u_0) = \frac{\psi(u_1)}{2} \neq 0$; ma in $[\bar{u}_0, +\infty[$ ψ dovrebbe decrescere per il lemma 1 mentre è $\psi(u_0) < \psi(u_1)$.

Dalle (2.7), (1.3) segue poi:

$$\psi(v) = \psi(-v) - v \leq -v \qquad \forall v \in R^1 \tag{2.8}$$

e combinando le (2.7), (2.8) si ha la (1.6). c.v.d.

Osservazione 2. - Quando le (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) sono le condizioni cui si perviene nella ricerca di un «operatore universale» collegato alla teoria dell'informazione la (1.6) è anche essa un dato del problema; il Corollario 1 può essere interpretato, dal punto di vista della Teoria dell'informazione, dicendo che se non si esclude che l'informazione possa assumere valori negativi non esistono «operatori universali».

Si indichi con $\psi^{-1}(0)$ l'insieme (eventualmente vuoto) $\{u \in R^1; \psi(u) = 0\}$; dimostriamo il lemma:

Lemma 2. - *Se* $\psi^{-1}(0) \neq \emptyset$ *si ha* $\psi^{-1}(0) =]-\infty, 0[$.

Dim. - L'insieme $\psi^{-1}(0)$ è chiuso (per la (1.1)) e superiormente limitato (per la (2.1)); sia x_0 il suo elemento massimo. A sinistra di x_0 ψ non può assumere valori negativi (per il lemma 1) né positivi (per la (2.7)); ne segue:

$$\psi(x) = 0 \quad \forall x \leq x_0; \qquad \psi(x) < 0 \quad \forall x > x_0 \tag{2.9}$$

e per dimostrare il lemma bisogna dimostrare che si ha:

$$x_0 = 0. \tag{2.10}$$

La (1.3), essendo $\psi(x_0) = 0$, dà:

$$\psi(-x_0) = \psi(x_0) + x_0 = x_0 \tag{2.11}$$

da cui in particolare, per la (2.7), $x_0 \leq 0$; basterà allora dimostrare che è $x_0 \geq 0$ cioè (cfr. (2.9)) che

$$0 \in \psi^{-1}(0) \tag{2.12}$$

e per avere la (2.12) basterà dimostrare che si ha:

$$\psi(x_0 - \psi(0)) = 0 \tag{2.13}$$

perchè tale relazione dà $x_0 - \psi(0) \in \psi^{-1}(0)$ quindi (cfr. (2.9)) $x_0 - \psi(0) \leq x_0$ cioè $\psi(0) \geq 0$ da cui la (2.12) (per la (2.7)).

Dimostriamo allora la (2.13); si avrà, applicando prima la (1.3) con $u = x_0 - \psi(0)$ e poi la (1.2) con $u = -x_0$, $v = 0$:

$$\begin{gathered}\psi(x_0 - \psi(0)) = \psi(-x_0 + \psi(0)) - x_0 + \psi(0) = (\text{cfr. } (2.11))\\ [\psi(-x_0 + \psi(0)) - \psi(-x_0)] + \psi(0) = [\psi(0 + \psi(x_0)) - \psi(0)] + \psi(0) =\\ = \psi(\psi(-x_0)) = (\text{cfr. } (2.11)) \qquad \psi(x_0) = 0 \ (\text{cfr. } (2.9)).\ \text{c.v.d.}\end{gathered}$$

COROLLARIO 2. - *Vale la relazione*

$$\psi(u) < 0 \qquad \forall u \in R^1 \tag{2.14}$$

DIM. - Infatti se fosse falsa la (2.14) si avrebbe, per la (2.7), $\psi^{-1}(0) \neq \emptyset$; il lemma 2 dà allora $\psi(u) = -\frac{1}{2}\{u + |u|\}$ $\forall u \leq 0$; e la (1.3) dà $\psi(u) = -\frac{1}{2}\{u + |u|\}$ $\forall u \geq 0$; cioè $\psi(u) \equiv \psi_\infty(u)$ contro la (1.12). c.v.d.

TEOREMA 2. - *Valgono le seguenti relazioni.*

$$R(\psi) =]-\infty, 0[\tag{2.15}$$

$$\psi \textit{ è decrescente} \tag{2.16}$$

$$\mu(R^1 - D(\psi')) = 0 \tag{2.17}$$

$$-1 < \frac{\psi(u) - \psi(v)}{u - v} < 0 \qquad u, v \in R^1 \textit{ con } u \neq v. \tag{2.18}$$

DIM. - La (2.15) segue dalle (2.3), (2.14); la (2.16) segue dalla (2.15) e dal lemma 1; la (2.17) segue dalla (2.16) e dalla (1.14); infine la (2.18) segue dalla (2.16) e dal fatto (conseguenza immediata della (2.16) e della (1.3)) che la funzione $u \longrightarrow \psi(u) + u = \psi(-u)$ è crescente. c.v.d.

Corollario 3. - *Per ogni* $u \in D(\psi'_-)$ (*risp.* $v \in D(\psi'_+)$) *si ha:*

(2.19) $$-1 \leq \psi'_-(u) \leq 0 \qquad (\textit{risp.}\ -1 \leq \psi'_+(v) \leq 0).$$

Dim. - Basta applicare la (2 18) alla definizione di ψ'_-, ψ'_+. c.v.d.

Corollario 4. - *Le relazioni* «$w \longrightarrow -\infty$» *e* «$\psi(w) \longrightarrow 0-$» *sono equivalenti.*

Dim. - Ovvia per le (1.1), (1.4), (2.15), (2 16). c.v.d.

Teorema 3. - *Valgono le relazioni* [6]:

(2.20) $$\psi'_-(v) = \lim_{w \longrightarrow -\infty} \frac{\psi(w + \psi(v))}{\psi(w)} - 1$$

(2.21) $$\psi'_+(v) = -1 - \psi'_-(-v)$$

(2.22) $$\psi_+'(v) = -\lim_{w \longrightarrow -\infty} \frac{\psi(w + \psi(-v))}{\psi(w)}$$

Dim. - Per ogni $h < 0$ sia $w_h = \psi^{-1}(h)$ (w_h esiste ed è unico per le (2.15), (2.16)); si avrà, per ogni $v \in R^1$ (cfr. anche (1.2)):

$$\frac{\psi(v+h) - \psi(v)}{h} = \frac{\psi(v + \psi(w_h)) - \psi(v)}{\psi(w_h)} = \frac{\psi(w_h + \psi(v)) - \psi(w_h)}{\psi(w_h)} =$$
$$= \frac{\psi(w_h + \psi(v))}{\psi(w_h)} - 1\,;$$

da cui ovviamente la (2.20) (cfr. anche il corollario 4). La (2.21) è ovvia conseguenza della (1.3); la (2.22) segue da (2.20), (2.21). c.v.d.

3. Dalla (2.18) segue la lipschitzianità di ψ (con costante di Lipschitz ≤ 1); tale relazione, unita alla (2.17), implica [7]:

(3.1) $$\mu(]-\infty, 0[- \{\psi(u);\ u \in D(\psi')\}) = 0.$$

(6) Le (2.20), (2 21), (2.22) (e la successiva (4.1)) sono da intendersi nel senso che, se uno dei due membri esiste, esiste anche l'altro e le due espressioni coincidono.

(7) Tale implicazione è ben nota; tuttavia in questo caso, grazie alla (2.16) la relazione (3 1) si può ottenere rapidamente: fissato $\varepsilon > 0$ sia $I_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$ con $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon$ tale che $R^1 - D(\psi') \subset I_\varepsilon$ (I_ε esiste per

LEMMA 3. - *Per ogni* $u \in R^1$ *esistono* x, y *tali che*

$$\psi(u) = \psi(x) + \psi(y) \qquad x,\ y \in D(\psi'). \tag{3.2}$$

DIM. - Per la (3.1) l'insieme $\{\psi(u) - \psi(x);\ x \in D(\psi')\}$ è quasi tutta la semiretta $]\psi(u), +\infty[$; sempre per la (3.1) l'insieme $\{\psi(y);\ y \in D(\psi')\}$ è quasi tutto il segmento $]\psi(u), 0[$ quindi (essendo $\psi(u) < 0$; cfr. (2.15)) non è vuota. c.v.d.

TEOREMA 4. - $D(\psi'_-) = R^1$; *per ogni* $u \in R^1$ *si ha inoltre*;

$$\psi'_-(u) + 1 = [\psi'(x) + 1][\psi'(y) + 1] \tag{3.3}$$

$\forall x$, y *tali che valga la* (3.2).

DIM. - Sia $u \in R^1$ e siano x, y tali che valga la (3.2). Poichè $\psi'(x)$ e $\psi'(y)$ esistono debbono esistere (e verificare la (2.20) con $v = x$ e $v = y$ rispettivamente) $\psi'_-(x)$ e $\psi'_-(y)$ ne segue:

$$[\psi'(x) + 1][\psi'(y) + 1] = [\psi'_-(x) + 1][\psi'_-(y) + 1] =$$

$$= \lim_{w_1 \to -\infty} \frac{\psi(w_1 + \psi(x))}{\psi(w_1)} \cdot \lim_{w_2 \to -\infty} \frac{\psi(w_2 + \psi(y))}{\psi(w_2)} =$$

$$= \lim_{w_2 = w_1 - \psi(y) \to -\infty} \frac{\psi(w_2 + \psi(x) + \psi(y))}{\psi(w_2 + \psi(y))} \cdot \lim_{w_2 \to -\infty} \frac{\psi(w_2 + \psi(y))}{\psi(w_2)} = (\text{cfr. } (3.2)) =$$

$$= \lim_{w \to -\infty} \frac{\psi(w + \psi(u))}{\psi(w)}$$

(e tale limite esiste). Ne segue il teorema grazie alla (2.20) con con $v = u$. c.v.d.

Dal teorema 4 e dalla (2.21) segue ovviamente il corollario:

la (2.17); si avrà:

$$]-\infty, 0[- \{\psi(u);\ u \in D(\psi')\} \subset \{\psi(u);\ u \in I_\varepsilon\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\psi(u);\ u \in]a_k, b_k[\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}]\psi(b_k), \psi(a_k)[;$$

da cui, per la (2.18)

$$\mu(]-\infty, 0[- \{\psi(u);\ u \in D(\psi')\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\psi(a_k) - \psi(b_k)) < \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon.$$

COROLLARIO 5. - $D(\psi'_+) = R^1$.

LEMMA 4. - *Valgono le seguenti relazioni:*

$$\lim_{h \to 0-} \frac{\psi(v+\psi(u+h))-\psi(v+\psi(u))}{h} = \psi'_+(v+\psi(u))\cdot\psi'_-(u) \qquad \forall u,\, v \in R^1 \tag{3.4}$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{\psi(v+\psi(u+h))-\psi(v+\psi(u))}{h} = \psi'_-(v+\psi(u))\cdot\psi'_+(u) \qquad \forall u,\, v \in R^1 \tag{3.5}$$

$$\psi'_-(u+\psi(v)) - \psi'_-(u) = \psi'_+(v+\psi(u))\cdot\psi'_-(u) \qquad \forall u,\, v \in R^1 \tag{3.6}$$

$$\psi'_+(u+\psi(v)) - \psi'_+(u) = \psi'_-(v+\psi(u))\cdot\psi'_+(u) \qquad \forall u,\, v \in R^1 \tag{3.7}$$

DIM. - Sia $u \in R^1$; per ogni $h < 0$ sia $k = \psi(u+h) - \psi(u)$; si avrà, per ogni $v \in R^1$:

$$\frac{\psi(v+\psi(u+h)) - \psi(v+\psi(u))}{h} =$$

$$= \frac{\psi(v+\psi(u)+k) - \psi(v+\psi(u))}{k} \cdot \frac{\psi(u+h)-\psi(u)}{h}.$$

Al tendere di h a zero (da sinistra) k tenderà a zero (da destra; cfr. (1.1) e (2.16)); poichè i due fattori del secondo membro ammettono limite al tendere di h a zero da sinistra e di k a zero da destra (cfr. teorema 4 e corollario 5) deve avere limite anche il primo membro; si ottiene così la (3.4). La (3.5) si ottiene in modo analogo; le (3.6) e (3.7) si ottengono rispettivamente derivando a sinistra e a destra la (1.2) e tenendo conto delle (3.4), (3.5). c.v.d.

COROLLARIO 6. - *ψ'_+ e ψ'_- sono non crescenti; e si ha:*

$$-1 < \psi'_-(u) < 0; \qquad -1 < \psi'_+(u) < 0 \qquad \forall u \in R^1. \tag{3.8}$$

DIM. - La non crescenza di ψ'_+ (risp. di ψ'_-) si ottiene osservando che il secondo membro di (3.7) (risp. di (3.6)) non è mai negativo (cfr. (2.19)) [8]; ed osservando che al variare di v in R^1 $u + \psi(v)$ descrive la semiretta $]-\infty, u[$ (cfr. (2.15)).

Sia per assurdo $\psi'_+(u_0) = 0$ (risp. $\psi'_-(u_0) = 0$); per la non crescenza di ψ'_+ (risp. di ψ'_-) si avrà, grazie alla (2.19), $\psi'_+(u) = 0$ (risp. $\psi'_-(u) = 0$) per $u \in]-\infty, u_0]$; allora ψ dovrebbe essere costante in $]-\infty, u_0]$ (cfr. (1.16)) contro la (2.16). Inoltre né ψ'_+ né ψ'_-

(8) Una volta in possesso delle (3.8) si potrà dire che tali espressioni sono positive e dedurre, con lo stesso ragionamento, la decrescenza stretta di ψ'_+ e ψ'_-; comunque ciò non servirà nel seguito.

possono assumere il valore -1 perché (cfr. (2.21)) ne seguirebbe che ψ'_- o ψ'_+ si annullerebbero; ne segue la (3 8) grazie ancora alla (2.19)). c.v.d.

COROLLARIO 7. - *Valgono le relazioni*:

$$\lim_{u \to -\infty} \psi'_-(u) = 0; \qquad \lim_{u \to -\infty} \psi'_+(u) = 0. \tag{3.9}$$

DIM. - I limiti scritti esistono e non sono positivi (cfr. Corollario 6); se per assurdo si avesse (ragionando su ψ'_-; analogamente si procederà per ψ'_+) $\lim_{u \to -\infty} \psi'_-(u) = \alpha < 0$ la funzione $u \to \psi(u) - \frac{\alpha}{2} u$ avrebbe derivata sinistra negativa in tutta una semiretta del tipo $]-\infty, u_0[$ per u_0 opportuno; quindi (cfr. (1.15)) $\psi(u) - \frac{\alpha}{2} u$ decrescerebbe in $]-\infty, u_0[$; ma ciò contrasta con la (1.4). c.v.d.

TEOREMA 5. - *Valgono le seguenti relazioni:*

$$D(\psi') = R^1 \tag{3.10}$$

$$u \to \psi(u) \in C^1(R^1) \tag{3.11}$$

$$\psi'(u + \psi(v)) - \psi'(u) = \psi'(v + \psi(u))\psi'(u) \qquad \forall u, v \in R^1 \tag{3.12}$$

$$\psi' \textit{ non cresce} \tag{3.13}$$

$$\mu(R^1 - D(\psi'')) = 0. \tag{3.14}$$

DIM. - Osserviamo che basta dimostrare la relazione:

$$\psi'_+ \text{ e } \psi'_- \textit{ sono continue a sinistra.} \tag{3.15}$$

Infatti dalla (3.15) seguirà, per la (1 21), la continuità di ψ'_- (e di ψ'_+); la (1.16) dà allora le (3.10), (3.11); le (3.12), (3.13) sono date dalla (3.6) e dal Corollario 6 (in cui ormai $\psi'_+ = \psi'_- = \psi'$); la (3.14) segue dalla (3.13) e dalla (1.14). Dimostriamo perciò la (3.15): tenendo conto del Corollario 4 essa è conseguenza immediata delle (3.6), (3.7), (3 9) (basta far tendere v a $-\infty$ nelle (3.6), (3.7)). c.v.d.

4. Dalla (3 12), grazie al corollario 4, si ha (cfr. (6)):

$$\psi''_-(v) = \lim_{n \to -\infty} \frac{\psi'(w + \psi(v))}{\psi(w)} \cdot \psi'(v). \tag{4.1}$$

Sia ora u generica in R^1; e siano x, y tali che:

$$y < u; \qquad y \in D(\psi'') \tag{4.2}$$

$$x = \psi^{-1}(\psi(u) - \psi(y)) \tag{4.3}$$

(y esiste per la (3.14); si ha $\psi(u) - \psi(y) < 0$ per la (2.16) quindi x esiste ed è unico per le (2.15), (2.16)).

LEMMA 5. - $D(\psi''_-) = R^1$; *per ogni* $u \in R^1$ *si ha*

$$\psi''_-(u) = \psi'(u)[1 + \psi'(x)]\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} \tag{4.4}$$

$\forall x$, y *tali che valgano* (4.2), (4.3).

DIM. - Essendo $y \in D(\psi'')$ si avrà (che $\psi''(y)$ esiste, coincide con $\psi''_-(y)$ e per la (4.1) verifica la relazione):

$$\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} = \lim_{w_1 \to -\infty} \frac{\psi'(w_1 + \psi(y))}{\psi(w_1)} = \lim_{w_2 = w_1 - \psi(x) \to -\infty} \frac{\psi'(w_2 + \psi(x) + \psi(y))}{\psi(w_2 + \psi(x))} =$$

$$= (\text{cfr. } (4.3)) \lim_{w_2 \to -\infty} \frac{\psi'(w_2 + \psi(u))}{\psi(w_2 + \psi(x))}.$$

Si avrà inoltre (che poiché $D(\psi') = R^1$ $\psi'(x)$ esiste, coincide con $\psi'_-(x)$ e, per la (2.20), verifica la relazione):

$$[1 + \psi'(x)] = \lim_{w_2 \to -\infty} \frac{\psi(w_2 + \psi(x))}{\psi(w_2)}$$

e dalle due relazioni ottenute segue

$$\psi'(u)[1 + \psi'(y)]\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} = \psi'(u) \cdot \lim_{w \to -\infty} \frac{\psi'(w + \psi(u))}{\psi(w)}$$

quindi, per la (4.1), $\psi''_-(u)$ esiste e verifica (4.4). c.v.d.

TEOREMA 6. - $D(\psi'') = R^1$; $u \to \psi''(u) \in C^0(R^1)$.

DIM. - Basterà (cfr. (1.16)) dimostrare la continuità di $\psi''_-(u)$; e tale continuità segue ovviamente dalla (4.4): se si fa variare u in un intervallo $[a, b]$ e se in (4.2) si è fissato, una volta per tutte, $y < a$, al variare di u in $[a, b]$ x dato da (4.3) varia con continuità; e $\psi'(u)$, $\psi'(x)$ variano con continuità (cfr. (3.11)). c.v.d.

Si è così ottenuta la (1.13) ed il teorema 1 è completamente dimostrato.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
l'8 marzo 1967