BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIUS I. STOKA

# Connexions invariantes sur des espaces riemanniens à métrique indéfinie à courbure constante.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **22** (1967), n.2, p. 219–227.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_2_219_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

# Connexions invariantes sur des espaces riemanniens à métrique indéfinie à courbure constante

MARIUS I. STOKA (Bucarest) (*)

**Résumé.** - *On détermine les connexions affines invariantes sur des espaces riemanniens $V_2$, $V_3$ et $V_4$ à métrique indéfinie à courbure constante.*

Soit $V_n$ un espace riemannien à métrique

$$ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j, \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

et dont le groupe de mouvements est le groupe $G_r$ défini par les opérateurs

$$X_h f = \xi_h^i \partial_i f, \qquad (h = 1, \ldots, r).$$

La connexion affine $\Gamma_{jk}^i$ est invariante sur l'espace $V_n$ si

$$\partial_{jk}^2 \xi_h^i = \xi_h^r \partial_r \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{js}^i \partial_k \xi_h^s + \Gamma_{sk}^i \partial_j \xi_h^s - \Gamma_{jk}^r \partial_r \xi_h^i . \tag{2}$$

Si nous notons par $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ la connexion de LEVI-CIVITA attachée à l'espace $V_n$ (1), c'est-à-dire

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = - \left| \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right|$$

alors la connexion $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ est une solution du système (2), donc est une connexion invariante sur l'espace $V_n$. En supposant que le système (2) admet une autre solution $\Gamma_{jk}^i \neq \bar{\Gamma}_{jk}^i$, nous notons

$$R = a^{ij} P_{ij}, \qquad \bar{R} = a^{ij} \bar{P}_{ij}, \qquad T = a^{ij}(T_l T_{ij}^l - T_{ij}),$$

où $a^{ij}$ sont les réciproques des éléments $a_{ij}$ et

$$P_{ij} = \frac{\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}}{2}, \qquad (\Gamma_{ij} = \Gamma_{il_j}^l),$$

(*) Une version en langue roumaine va paraître dans «Studii și cercetări matematice».

$\Gamma^i_{jkl}$ étant le tenseur de courbure de la connexion $\Gamma^i_{jk}$ et

$$T_l = T^i_{li}, \qquad T_{ij} = T^l_{kj}\, T^k_{il}$$

où nous avons noté $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \overline{\Gamma}^i_{jk}$.

G. TALLINI a démontré [5] que si

$$R - \overline{R} - T = 0,$$

la connexion $\Gamma^i_{jk}$ est compatible avec un espace riemannien $V_n$ compact et orientable.

G. VRĂNCEANU a montré [6] que, sur un espace $V_2$ à métrique définie à courbure constante négative il n'existe aucune connexion invariante au groupe $G_3$ de mouvements de l'espace en outre de la connexion de LEVI-CIVITA attachée à l'espace. Dans une étude antérieure [1], nous avons démontré une propriété analogue pour l'espace $V_2$ à courbure constante positive et nous avons déterminé les connexions affine invariantes sur un espace $V_3$ à métrique définie à courbure constante et sur un espace $V_3$ à métrique définie ayant un groupe de mouvements $G_4$. Dans les études [2] et [3] nous avons déterminé les connexions invariantes sur un espace $V_3$ a métrique défini ayant comme groupe total de mouvements un groupe $G_3$ transitif, respectivement intransitif.

Dans cette étude nous déterminons les connexions invariantes sur les espaces $V_2$, $V_3$ et $V_4$ à metrique indéfinie à courbure constante.

## I

Soit $V_2$ un espace riemannien à métrique indéfinie à courbure nulle, dont la métrique est

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2. \tag{3}$$

Le groupe de mouvements de cet espace est défini par les opérateurs

$$X_1 f = \partial_1 f, \qquad X_2 f = \partial_2 f, \qquad X_3 f = x^2 \partial_1 f + x^1 \partial_2 f.$$

Pour $h = 1, 2$, le système (2) nous fournit

$$\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk}, \qquad (a^i_{jk} = \text{const}).$$

Avec ces valeurs, le système (2) à $h = 3$ nous fournit

$$\Gamma^i_{jk} = 0.$$

Donc, nous avons le

THÉORÈME 1. – *Il n'existe aucune connexion invariante sur l'espace riemannien $V_2$ à métrique indéfinie et courbure nulle.*

Nous considérons maintenant un espace $V_2$ à métrique indéfinie à courbure constante positive $K > 0$. Nous pouvons écrire la métrique de cet espace sous la forme [4] [1]

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 - (dx^2)^2}{K(x^2)^2}. \tag{4}$$

Le groupe de mouvements de cet espace est défini par les opérateurs [4] [2]

$$X_1 f = \partial_1 f, \qquad X_2 f = [(x^1)^2 + (x^2)^2]\partial_1 f + 2x^1 x^2 \partial_2 f,$$
$$X_3 f = x^1 \partial_1 f + x^2 \partial_2 f.$$

Pour $h = 1$, le système (2) s'écrit

$$\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^1} = 0,$$

donc

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^2).$$

En remplaçant cette valeur dans le système (2) pour $h = 3$,

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{a^i_{jk}}{x^2}, \qquad (a^i_{jk} = \text{const}).$$

Enfin, le système (2) à $h = 2$ nous fournit

$$a^1_{11} = a^1_{22} = a^2_{12} = a^2_{21} = 0, \qquad a^1_{12} = a^1_{21} = a^2_{11} = a^2_{22} = 1.$$

Donc, la connexion invariante sur l'espace (4) a les composantes

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0, \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 1.$$

Cette connexion est identique à la connexion de LEVI-CIVITA attachée a l'espace (4).

(1) Page 603.
(2) » 607.

Pour l'espace $V_2$ à métrique indéfinie à courbure constante négative $K < 0$ qui a la métrique [4] ([3])

$$ds^2 = \frac{(ds^1)^2 - (ds^2)^2}{-K(x^1)^2}$$

et le groupe de mouvements défini par les opérateurs [4] ([4])

$$X_1f = \partial_2 f, \quad X_2 f = x^1\partial_1 f + x^2\partial_2 f, \quad X_3 f = 2x^1x^2\partial_1 f + [(x^1)^2 + (x^2)^2]\partial_2 f,$$

nous obtenons un résultat analogue.

Il en résulte le

THÉORÈME 2. - *La seule connexion affine invariante sur un espace $V_2$ à métrique indéfinie à courbure constante non nulle est la connexion de Levi-Civita attachée à l'espace.*

## II

Nous considérons maintenant les espaces $V_3$ à métrique indéfini à courbure constante.

Soit $V_3$ un espace riemannien à métrique indéfinie à courbure nulle qui a la métrique

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{5}$$

Le groupe de mouvements de cet espace est définie par les opérateurs [4] ([5])

$$X_i f = \partial_i f, \ (i = 1, 2, 3), \qquad X_4 f = x^2\partial_1 f - x^1\partial_2 f,$$
$$X_5 f = x^3\partial_1 f + x^1\partial_3 f, \qquad X_6 f = x^3\partial_2 f + x^2\partial_3 f.$$

Pour $h = 1, 2, 3$, le système (2) nous fournit

$$\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk}, \qquad \text{(const)}.$$

En remplaçant ces valeurs dans le système (2) pour $h = 4, 5, 6$ nous obtenons

$$a^1_{11} = a^1_{22} = a^1_{33} = a^1_{12} = a^1_{21} = a^1_{13} = a^1_{31} = a^2_{11} = a^2_{22} = a^2_{33} = a^2_{12} = a^2_{21} =$$
$$a^2_{23} = a^2_{32} = a^3_{11} = a^3_{22} = a^3_{33} = a^3_{13} = a^3_{31} = a^3_{23} = a^3_{32} = 0,$$
$$a^1_{23} = -a^1_{32} = -a^2_{13} = a^2_{31} = -a^3_{12} = a^3_{21}.$$

([3]) Page 603.
([4]) » 611.
([5]) » 611.

Donc, si nous notons $a^1_{23} = \lambda$ la connexion affine invariante sur l'espace (5) a les composantes

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = -\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \lambda,$$

les composantes non écrites étant nulles.

La connexion de Levi-Civita attachée à l'espace (5) a toutes les composantes nulles.

Avec ces valeurs nous avons

$$R = 6\lambda^2, \qquad \bar{R} = 0, \qquad T = 6\lambda^2$$

donc

$$R - \bar{R} - T = 0.$$

Il en résulte que *les connexions affines invariantes sur un espace $V_3$ à métrique indéfinie et courbure nulle dépendent d'une constant arbitraire, étant compatible avec un espace $V_3$ compact et orientable.*

Nous considérons maintenant un espace $V_3$ à métrique indéfinie à courbure constante positive $K > 0$. Nous pouvons écrire la métrique de cet espace sous la forme [4] (6)

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2}{K(x^3)^2}. \tag{6}$$

Le groupe de mouvements de cet espace est défini par les opérateurs [4] (7)

$$X_1 f = \partial_1 f, \quad X_2 f = \partial_2 f, \quad X_3 f = x^i \partial_i f, \ (i = 1, 2, 3), \quad X_4 f = x^2 \partial_1 f - x^1 \partial_2 f,$$
$$X_5 f = [(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2]\partial_1 f + 2x^1 x^2 \partial_2 f + 2x^1 x^3 \partial_3 f,$$
$$X_6 f = 2x^1 x^2 \partial_1 f + [-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]\partial_2 f + 2x^2 x^3 \partial_3 f.$$

Pour $h = 1, 2$, le système (2) fournit

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^3),$$

laquelle, remplacée dans le système (2) avec $h = 3$, nous conduit à

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{a^i_{jk}}{x^3}, \qquad (a^i_{jk} = \text{const}).$$

(6) Page 603.
(7) » 611.

Avec ces valeurs, le système (2) pour $h = 4, 5, 6$, nous fournit

$$a^1_{11}=a^1_{12}=a^1_{21}=a^1_{22}=a^2_{11}=a^2_{12}=a^2_{21}=a^2_{22}=a^1_{33}=a^2_{33}=a^3_{13}=a^3_{31}=a^3_{23}=a^3_{32}=0,$$

$$a^1_{13} = a^1_{31} = a^2_{23} = a^2_{32} = a^3_{11} = a^3_{22} = a^3_{33} = 1,$$

$$a^1_{23} = -a^1_{32} = -a^2_{13} = a^2_{31} = -a^3_{12} = a^3_{21}.$$

Si nous notons $a^1_{23}=\lambda$, la connexion affine invariante sur l'espace (5) a les composantes

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{33} = \frac{1}{x^3},$$

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = -\Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = -\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \frac{\lambda}{x^3},$$

les composantes non écrites étant nulles. Pour $\lambda = 0$, nous obtenons la connexion de Levi-Civita attachée à l'espace (6).

Avec ces valeurs nous avons

$$R = 6K(1 + \lambda^2), \qquad \bar{R} = 6K, \qquad T = 6K\lambda^2$$

donc

$$R - \bar{R} - T = 0.$$

Il en résulte que *les connexions affines invariantes sur un espace $V_3$ à métrique indéfinie et courbure constante positive dépendent d'une constante arbitraire, étant compatible avec un espace $V_3$ compact et orientable.*

Nous obtenons un résultat analogue pour l'espace $V_3$ à métrique indéfinie à courbure constante négative.

Donc, nous avons le

Théorème 3. – *Les connexions affines invariantes sur un espace $V_3$ à métrique indéfinie à courbure constante, dépendent d'une constante arbitraire, étant compatible avec un espace $V_3$ compact et orientable.*

## III

Nous considérons maintenant les espaces $V_4$ a métrique indéfinie à courbure constante.

Soit $V_4$ un espace riemannien à métrique indéfinie à courbure nulle. La métrique d'un tel espace peut être réduit à deux formes

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2 \tag{7}$$

et

$$(7') \qquad ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2.$$

L'espace (7) a comme groupe de mouvements le groupe défini par les opérateurs [4] ([8])

$$X_i f = \partial_i f,\ (i = 1, \dots, 4),\quad X_5 f = x^2\partial_1 f - x^1\partial_2 f,\quad X_6 f = x^3\partial_2 f - x^2\partial_3 f,$$
$$X_7 f = x^3\partial_1 f - x^1\partial_3 f,\quad X_8 f = x^4\partial_1 f + x^1\partial_4 f,\quad X_9 f = x^4\partial_2 f + x^2\partial_4 f,$$
$$X_{10} f = x^4\partial_3 f + x^3\partial_4 f.$$

Pour $h = 1, \dots, 4$, le système (2) nous fournit

$$\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk}, \qquad \text{(const)}.$$

En remplaçant ces valeurs dans les système (2) pour $h = 5, \dots, 10$ nous obtenons

$$a^i_{jk} = 0.$$

Donc, *il n'existe aucune connexion invariante sur l'espace* (7). Nous obtenons un résultat analogue pour l'espace (7′).

Il en résulte le

THÉORÈME 4. – *Il n'existe aucune connexion invariante sur les espaces riemanniens $V_4$ à métrique indéfinie et courbure nulle.*

Soit maintenant un espace $V_4$ à métrique indéfinie à courbure constante positive $K > 0$. La métrique d'un tel espace peut être réduit à l'une des deux formes suivantes [4] ([9])

$$(8) \qquad ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2}{K(x^4)^2}$$

ou

$$(8') \qquad ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2}{K(x^4)^2}.$$

Le groupe de mouvements de l'espace (8) est défini par les opérateurs [4] ([10])

$$X_j f = \partial_j f,\ (j = 1, 2, 3),\quad X_4 f = x^2\partial_1 f - x^1\partial_2 f,\quad X_5 f = x^3\partial_2 f - x^2\partial_3 f,$$

([8]) Page 611.
([9]) » 603.
([10]) » 607.

$$X_6 f = x^3\partial_1 f - x^1\partial_3 f, \qquad X_7 f = x^i\partial_i f, \qquad (i = 1, \ldots, 4),$$
$$X_8 f = [(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2]\partial_1 f + 2x^1x^2\partial_2 f + 2x^1x^3\partial_3 f + 2x^1x^4\partial_4 f,$$
$$X_9 f = 2x^1x^2\partial_1 f + [-(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2]\partial_2 f + 2x^2x^3\partial_3 f + 2x^2x^4\partial_4 f,$$
$$X_{10} f = 2x^1x^3\partial_1 f + 2x^2x^3\partial_2 f + [-(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2]\partial_3 f + 2x^3x^4\partial_4 f$$

Pour $h = 1, 2, 3$, le système (2) nous fournit

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^4).$$

En remplaçant cette valeur dans le système (2) avec $h = 7$, nous obtenons

$$\Gamma^i_{jk}\,\frac{a^i_{jk}}{x^4}, \qquad (a^i_{jk} = \text{const}).$$

Enfin, le système (2) pour $h = 4, 5, 6, 8, 9, 10$ nous fournit

$$a^1_{14} = a^1_{41} = a^2_{24} = a^2_{42} = a^3_{34} = a^3_{43} = a^4_{11} = a^4_{22} = a^4_{33} = a^4_{44} = 1,$$

les autres constantes étant nulles.

Les composantes non nulles de la connexion invariante sur l'espace (8) sont donc

$$\Gamma^1_{14} = \Gamma^1_{41} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^2_{42} = \Gamma^3_{34} = \Gamma^3_{43} = \Gamma^4_{11} = \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} = \Gamma^4_{44} = \frac{1}{x^4}.$$

Cette connexion est identique à la connexion de Levi-Civita attachée à l'espace (8).

Donc, *la seule connexion affine invariante sur l'espace* (8) *est la connexion de Levi-Civita attachée à l'espace.*

Nous obtenons des résultats analogues pour l'espace (8′) et pour les espaces $V_4$ a métrique indéfinie à courbure constante négative. Il en résulte le

Théorème 5. – *La seule connexion invariante sur un espace $V_4$ à métrique indéfinie à courbure constante non nulle est la connexion de Levi-Civita attachée à l'espace.*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Stoka, *Connexions invariantes sur un espace riemannien $V_n$*, «Revue Roum. de Math. Pures et appl.», t. 10, nr. 9, 1965.

[2] — —, *Connexions invariantes sur un espace riemannien $V_3$*, I, «Bull. de l'Ac. R. de Belgique», t. 50, nr. 11, 1964.

[3] M. STOKA, *Connexions invariantes sur un espace riemannien $V_3$, II*, « Revue Roum. de Math. Pures et appl. », t. 10, nr. 8, 1965.

[4] — —, *Asupra spațiilor riemanniene cu metrica nedefinită cu curbura constantă*, « Studii și Cercetări Matematice », vol. 14, nr. 4, 1963.

[5] G. TALLINI, *Una proprietà in grande delle varietà a connessione affine compatta con applicazioni alle varietà a connessione proiettiva*, « Rend. Accad. Lincei », 1962, vol. 32, pp. 644-648.

[6] G. VRANCEANU, *Sur quelques théorèmes de géométrie différentielle globale*, « Rev. Roum. de Math. Pures et Appl. », t. 10, nr. 2, 1965.

---

*Pervenuta alla Segreteria dell'* U. M. I.
*l'8 marzo 1967*