Bollettino
Unione Matematica Italiana

S. Guerra

L'optimum per la costante nel classico teorema d'approssimazione di Jackson.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.2, p. 205–207.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_2_205_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

L'optimum per la costante nel classico teorema d'approssimazione di Jackson.

S. Guerra (Trieste) (*)

Sunto. - *Si determina l'optimum per la costante che figura nel teorema di Jackson relativo all'approssimazione di una funzione continua mediante polinomi ordinari.*

Il ben noto teorema d'approssimazione di Jackson [1] afferma che, se la funzione $f(x)$ è continua sull'intervallo $[-1, 1]$ col modulo di continuità $\omega_f(\delta)$, qualunque sia l'intero positivo n, esiste un polinomio algebrico $P_n(x)$, di grado non superiore ad n, tale che, per ogni $x \in [-1, 1]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq M \cdot \omega_f\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1}$$

essendo M una costante (positiva) assoluta.

Detto $\mathcal{C}_n(x)$ il polinomio ordinario, di ordine non superiore ad n, di migliore approssimazione per la $f(x)$, nel senso di Tchebyschev ed $E_n(f)$ il minimo scarto dalla (1) segue, ovviamente:

$$E_n(f) \leq M \cdot \omega_f\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2}$$

In [2], raffinando una tecnica usata da Korovkin [3], è stato dimostrato che nella disuguaglianza (1) può porsi $M = 1$, vale a dire che si ha:

$$E_n(f) \leq \omega_f\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3}$$

Scopo di questa breve Nota è di far vedere che $M = 1$ è la *migliore* costante. (°)

Proveremo quanto ora asserito, mostrando, attraverso una classe di esempi, che la (2) può non essere verificata quando è $M < 1$; precisamente:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 24 del C.N.R.

(°) Per l'ottimazione della costante nella disuguaglianza di Jackson relativa a funzioni periodiche e a polinomi trigonometrici cfr. [4].

"Fissata una qualunque costante $M < 1$, esistono: una funzione $\varphi(x)$ continua in $[-1, 1]$ ed un intero positivo m, dipendenti da M, per i quali risulta

$$E_m(\varphi) > M\omega_\varphi\left(\frac{1}{m}\right). \tag{4}$$"

Fissata $M < 1$, si scelga un intero n tale che $n > \frac{1}{2(1-M)}$ e quindi si consideri la funzione $\varphi(x)$ definita (e continua) in $[0,1]$ al modo seguente:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -nx + (2r+1), \text{ per } \frac{2r}{n} \leq x \leq \frac{2r+1}{n} \left(r = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2}\right] (^1)\right) \\ nx - (2r+1), \text{ per } \frac{2r+1}{n} \leq x \leq \frac{2r+2}{n} \left(r = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-2}{2}\right]\right). \end{cases} \tag{5}$$

e prolungata per parità su $[-1, 0]$.

Posto $m = 2n - 1$, il polinomio $\mathscr{C}_m(x)$ (di ordine non superiore ad m) di migliore approssimazione per la $\varphi(x)$, nel senso di TCHEBYSCHEV, è dato da

$$\mathscr{C}_m(x) \equiv \frac{1}{2} \tag{6}$$

e, per il minimo scarto, risulta

$$E_m(\varphi) = \frac{1}{2} (^2). \tag{7}$$

Se $\omega_\varphi(\delta)$ è il modulo di continuità della $\varphi(x)$ si ha poi, come facilmente può verificarsi,

$$\omega_\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{2n-1}. \tag{8}$$

(1) Il simbolo $[k]$ indica il massimo intero contenuto in $[K]$.

(2) Segue subito, ricordando un classico teorema, dall'esistenza di $m + 2 = 2n + 1$ punti:

$$-1, -\frac{n-1}{n}, -\frac{n-2}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$$

nei quali la differenza $\varphi(x) - \mathscr{C}_m(x)$ assume il valore $\frac{1}{2}$ con segni alterni.

Dall'ipotesi, e per il modo con il quale è stato scelto n, si ha

$$\frac{1}{2} > M \cdot \frac{n}{2n-1}; \tag{9}$$

da quest'ultima, per la (7) e la (8), segue allora la (4).

BIBLIOGRAFIA

[1] D. JACKSON, *The theory of Approximations*, New York (1930), pg. 15.

[2] S. GUERRA, *Osservazioni su un noto teorema di Jackson*, Boll. U.M.I., (3), vol. 18 (1963), pp. 57-64.

[3] P.P. KOROVKIN, *Linear operators and approximations theory*, « Hindustan Publishing Corp. (India), » 1960 (tradotto dall'edizione russa (1959)).

[4] N.P. KORNEICUK, *The exact constant in the theorem on the best uniform approximation of continuous functions*, Doklady 145 (1962) pp. 514-515.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 26 gennaio 1967.