GIULIO MATTEI

Sulla instabilità magnetogravitazionale di un mezzo comprimibile in rotazione uniforme. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.2, p. 191–199.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_2_191_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Sulla instabilità magnetogravitazionale di un mezzo comprimibile in rotazione uniforme (*)

GIULIO MATTEI (Pisa) (**)

NOTA I

Sunto. - *Si determina la condizione di instabilità magnetogravitazionale di un mezzo non dissipativo, indefinito, comprimibile, in rotazione uniforme, relativamente a una certa classe di perturbazioni ad ampiezza variabile. Si ritrova, come caso particolare, il criterio di Jeans per perturbazioni piane ad ampiezza costante. Risulta che le perturbazioni prese qui in esame agiscono in favore della stabilità rispetto a quelle ad ampiezza costante.*

Summary. - *The condition for magnetogravitational instability of a non dissipative, infinite, compressible medium in uniform rotation is determined relatively to a certain class of perturbations of variable amplitude. Jeans's criterion for plane perturbations of constant amplitude can be found again as a particular case. The perturbations examined here favour the stability more than the ones of constant amplitude.*

1. – Introduzione e posizione del problema.

Il problema della instabilità gravitazionale secondo JEANS di un mezzo comprimibile indefinito è stato trattato in numerosi lavori di vari Autori; rimandiamo per una Bibliografia molto vasta sull'argomento a S. CHANDRASEKHAR [1] p. 588 e segg. e A.G. PACHOLCZYK [2]. In questi lavori si determina, nei vari casi presi in esame ([1]), la condizione di instabilità, supponendo che il mezzo si trovi sotto l'azione di perturbazioni dipendenti da una sola coordinata spaziale (perturbazioni piane di ampiezza costante).

(*) Lavoro effettuato nell'ambito del Gruppo di Ricerca N. 7 per la Matematica del C.N.R.

(**) Istituto di Matematiche Applicate Fac. Ingegneria Università, Pisa.

([1]) Per es in [3] S. CHANDRASEKHAR, esaminando un fluido non viscoso e di conducibilità elettrica σ tanto grande da potersi ritenere infinita, ha mostrato che una rotazione uniforme e un campo magnetico uniforme agenti simultaneamente lasciano invariato il criterio di JEANS (con l'eccezione del caso in cui il campo magnetico sia ortogonale alla direzione di propagazione delle perturbazioni). Precedentemente al lavoro [3] S. CHANDRASEKHAR in [4] aveva mostrato che il criterio di JEANS per un fluido non viscoso non è influenzato da una rotazione uniforme agente

Lo scopo della presente nota è la ricerca della condizione di instabilità magnetogravitazionale relativa a un mezzo dotato di rotazione uniforme quando le perturbazioni non presentino più la dipendenza da una sola coordinata spaziale. Precisamente, supponendo l'asse di rotazione di simmetria cilindrica, si considerano perturbazioni propagantesi lungo l'asse le cui ampiezze dipendono dalla distanza dall'asse tramite opportune funzioni di BESSEL.

Dopo aver determinato la relazione di dispersione che deve essere verificata affinchè il sistema di equazioni linearizzate che reggono il problema ammetta come soluzioni le suddette perturbazioni, si risale da essa alla condizione di instabilità. Da questa ultima si può ritrovare, come caso particolare, la condizione di JEANS per il caso in esame. Il fluido è considerato non viscoso e perfetto conduttore dell'elettricità ed il campo magnetico primario è supposto uniforme e diretto come l'asse di rotazione.

Si esaminano, in particolare, i casi di assenza di rotazione e di campo magnetico, assenza di rotazione e presenza di campo magnetico, presenza di rotazione e assenza di campo magnetico.

Conclusioni comuni a tutti i casi sono le seguenti:

1°) risultando il numero d'onda critico k_J di JEANS maggiore di quello k_C relativo alle perturbazioni considerate qui, ne discende che queste ultime agiscono in favore della stabilità rispetto a quelle di ampiezza costante;

2°) per tutti i $k < k_C$ si ha almeno un modo di propagazione che degenera in un fenomeno diffusivo, mentre per tutti i $k > k_C$ non si ha mai diffusione.

2. - Relazione di dispersione.

Le equazioni linearizzate, con riferimento ad una terna di assi uniformemente rotante con la velocità di rotazione Ω della massa fluida, sono (cfr. per es. S. CHANDRASEKHAR [3] pag. 7, [1] pag. 595):

$$(1) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{a^2}{\rho_0}\operatorname{grad} \rho' + \frac{1}{4\pi\mu\rho_0}(\operatorname{rot} \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{B}_0 + 2\boldsymbol{v} \wedge \Omega + \operatorname{grad} U',$$

singolarmente (con l'eccezione del caso in cui l'asse di rotazione è ortogonale alla direzione di propagazione delle perturbazioni) e S. CHANDRASEKHAR e E. FERMI in [5] Sec. V avevano dimostrato che il criterio non si altera nel caso di un fluido non viscoso di σ infinita su cui agisce singolarmente un campo magnetico uniforme.

$$(2) \quad \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0), \qquad (3) \quad \mathrm{div}\ \boldsymbol{b} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \ \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}, \qquad (5) \quad \triangle_2 U' = -4\pi G \rho',$$

dove a è la velocità locale del suono, $\boldsymbol{b}/\mu$, ρ', U' le perturbazioni del campo magnetico, della densità e del potenziale gravitazionale e gli altri simboli hanno il significato abituale.

Derivando rispetto al tempo la (1) e tenendo conto di (2) e (4) si ha:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = a^2 \ \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} + \frac{1}{4\pi\mu\rho_0}\left[\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}_0)\right] \wedge$$
$$\wedge \boldsymbol{B}_0 + 2\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathrm{grad}\ \frac{\partial U'}{\partial t};$$

derivando rispetto al tempo la (5) e facendo uso della (4) si ha:

$$(7) \quad \triangle_2 \frac{\partial U'}{\partial t} = 4\pi G \rho_0 \ \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}.$$

Nelle (6) e (7) compaiono solo le incognite $\boldsymbol{v}$ e U'; una volta determinate queste, si risale a $\boldsymbol{b}$ dalla (2) tenendo conto di (3) e a ρ' dalla (4).

Assunta come terna di riferimento rotante una terna T di coordinate cilindriche ortogonali r, φ, z con z asse di rotazione, la (6) proiettata su T fornisce:

$$(8) \quad \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] + A^2 \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right] + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right\} +$$
$$+ 2\Omega \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 U'}{\partial r \partial t},$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} - 2\Omega \frac{\partial v_r}{\partial t},$$

$$(10) \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] + \frac{\partial^2 U'}{\partial z \partial t},$$

dove A^2 è il quadrato della velocità di ALFVÉN. La (7) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial U'}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 U'}{\partial z^2}\right]=4\pi\,G\rho_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]. \tag{11}$$

Richiediamo ora alle (8), (9), (10) e (11) soluzioni del tipo: [2]

$$\begin{aligned} v_r &= \bar{v}_r J_1(\gamma r)\, e^{i(\omega t - kz)} \\ v_\varphi &= \bar{v}_\varphi J_1(\gamma r)\, e^{i(\omega t - kz)} \\ v_z &= \bar{v}_z J_0(\gamma r)\, e^{i(\omega t - kz)} \\ U' &= \bar{U}' J_0(\gamma r)\, e^{i(\omega t - kz)}, \end{aligned} \tag{12}$$

dove J_1 e J_0 sono le funzioni di BESSEL di prima specie d'ordine uno e zero e γ una costante reale; $\bar{v}_r$, $\bar{v}_\varphi$, $\bar{v}_z$, $\bar{U}'$ sono delle costanti da considerarsi molto piccole in accordo col fatto che si usano equazioni linearizzate. Le (12) assicurano regolarità in tutto il campo e limitatezza.

Considerando k (numero d'onda) prefissato reale, determiniamo in un primo tempo l'equazione (relazione di dispersione) cui deve soddisfare ω affinchè il sistema di equazioni (8), (9), (10) e (11) ammetta effettivamente la soluzione particolare (12). Successiva-

(2) Per la determinazione di $\boldsymbol{b}$ la (2) proiettata su T fornisce:

$$\frac{\partial b_r}{\partial t}=B_0\,\frac{\partial v_r}{\partial z},\quad \frac{\partial b_\varphi}{\partial t}=B_0\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial z},\quad \frac{\partial b_z}{\partial t}=-\frac{B_0}{r}\,\frac{\partial (rv_r)}{\partial r},$$

dalle quali, per (12), si ricava:

$$\begin{aligned} b_r &= -\frac{B_0 k}{\omega}\,\bar{v}_r J_1(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} + F_1(r,\ z), \\ b_\varphi &= -\frac{B_0 k}{\omega}\,\bar{v}_\varphi J_1(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} + F_2(r,\ z), \\ b_z &= \frac{iB_0\gamma}{\omega}\,\bar{v}_r J_0(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} + F_3(r,\ z). \end{aligned}$$

Si può prescindere da F_1, F_2, F_3 dato che sono stazionari; la (3) allora risulta identicamente soddisfatta. Da (4) si deduce poi:

$$\rho' = \frac{i\rho_0}{\omega}\,(\gamma\bar{v}_r - i\,k\bar{v}_z) J_0(\gamma r) e^{i(\omega t - kz)} + F_4(r,\ z),$$

dove, ancora, si può prescindere da F_4.

mente dalla relazione di dispersione si risale alla determinazione del valore critico k_C del numero d'onda tale che per tutti i $k < k_C$ si ha instabilità gravitazionale. Sostituendo (12) in (8), (9), (10) e (11) si perviene al sistema lineare omogeneo di equazioni algebriche:

$$[(A^2 + a^2)\gamma^2 + A^2k^2 - \omega^2]\bar{v}_r - 2i\omega\Omega\bar{v}_\varphi - ika^2\gamma\bar{v}_z + i\omega\gamma\bar{U}' = 0, \tag{13}$$

$$2\Omega i\omega\bar{v}_r + (A^2k^2 - \omega^2)\bar{v}_\varphi = 0, \tag{14}$$

$$-ia^2k\gamma\bar{v}_r + (\omega^2 - a^2k^2)\bar{v}_z + \omega k\bar{U}' = 0, \tag{15}$$

$$4\pi G\rho_0\gamma\bar{v}_r - 4\pi G\rho_0 ik\bar{v}_z + i\omega(\gamma^2 + k^2)\bar{U}' = 0. \tag{16}$$

Affinchè ci siano soluzioni non banali deve annullarsi il determinante del sistema il che a conti fatti conduce alla relazione di dispersione a coefficienti reali:

$$a_0\omega^6 + a_1\omega^4 + a_2\omega^2 + a_3 = 0 \tag{17}$$

dove

$$a_0 = \gamma^2 + k^2,$$

$$a_1 = -(\gamma^2 + k^2)[M + 4\Omega^2 + A^2(\gamma^2 + 2k^2)],$$

$$a_2 = k^2\{2M[2\Omega^2 + A^2(\gamma^2 + k^2)] + A^4(\gamma^2 + k^2)^2\},$$

$$a_3 = -A^4k^4(\gamma^2 + k^2)M,$$

in cui si è posto:

$$M = a^2(\gamma^2 + k^2) - 4\pi G\rho_0. \tag{18}$$

3. - La condizione di instabilità gravitazionale.

Dalla (17) discende che ci sono in generale tre modi di propagazione; se con ω_1, ω_2, ω_3 indichiamo le costanti di frequenza di questi tre modi si ha:

$$\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2 = -\frac{a_3}{a_0} = A^4k^4M. \tag{19}$$

Da (19) segue che se è:

$$a^2(\gamma^2 + k^2) < 4\pi G\rho_0 \tag{20}$$

almeno una delle tre radici di ω^2 è reale negativa e quindi almeno uno dei tre modi è instabile. Il valore critico k_C è perciò:

$$k_C = \frac{1}{a}(4\pi G\rho_0 - a^2\gamma^2)^{1/2}\,. \tag{21}$$

Per $\gamma = 0$ da (12) abbiamo $v_r = v_\varphi = 0$ e

$$v_z = \bar{v}_z e^{i(\omega t - kz)}\,,$$

$$U' = \bar{U}' e^{i(\omega t - kz)}\,, \quad (^3)$$

cioè perturbazioni piane di ampiezza costante, e (21) ridà, per il caso in esame (Ω e $\boldsymbol{B}_0$ paralleli alla direzione di propagazione), il valore critico di JEANS $k_C = k_J = \dfrac{(4\pi G\rho_0)^{1/2}}{a}$.

Si osservi che, nel caso in esame, la condizione (21) vale in particolare sia che il fluido sia rotante o no e in presenza o no di un campo magnetico uniforme [4] (come già accadeva, cfr. nota (1), per il criterio di JEANS relativamente a perturbazioni di ampiezza costante).

Dimostriamo ora che per tutti i $k > k_C$ si ha stabilità nei tre casi:

1° - assenza di campo magnetico e di rotazione (che corrisponde al caso studiato per la prima volta da J. H. JEANS [6]),

2° - assenza di campo magnetico e presenza di rotazione,

3° - presenza di campo magnetico e assenza di rotazione.

[3] e, cfr. nota (2),:

$$\rho' = \rho_0 \frac{k}{\omega} \bar{v}_z e^{i(\omega t - kz)}.$$

Nel caso in esame risultando $\boldsymbol{v}$ parallela a $\boldsymbol{B}_0$ il problema diventa puramente gasdinamico, è $\boldsymbol{v} \wedge \Omega = 0$, e la relazione di dispersione risulta: $\omega^2 = a^2k^2 - 4\pi G\rho_0$.

[4] In assenza di campo magnetico ($A = 0$) la (17) diventa:

$$(\gamma^2 + k^2)\omega^4 - (\gamma^2 + k^2)(4\Omega^2 + M)\omega^2 + 4k^2\Omega^2 M = 0. \tag{22}$$

La (22), avendo discriminante positivo, ha per ω^2 due radici reali e, se si verifica la (20), una di esse è negativa. Quindi il criterio vale anche in questo caso. Esso vale anche, come è evidente dalla (22), se, oltre ad $A = 0$, è $\Omega = 0$.

Infatti nel 1° caso la (17) diventa:

$$\omega^2 = M$$

e quindi per $k > k_C$ abbiamo per ω due radici reali ed opposte. Nel 2° caso la (17) diventa (22) che per $k > k_C$ fornisce per ω quattro radici reali a due a due opposte. Nel 3° caso la (17) diventa:

$$(\omega^2 - A^2k^2)\{\omega^4 - [A^2(\gamma^2 + k^2) + M]\omega^2 + A^2k^2M\} = 0$$

che si spezza nella

$$\omega^2 - A^2k^2 = 0,$$

che descrive onde di ALFVÉN pure, e nella

$$\omega^4 - [A^2(\gamma^2 + k^2) + M]\omega^2 + A^2k^2M = 0;$$

quest'ultima per $k > k_C$ fornisce per ω quattro radici reali a due a due opposte.

Per le perturbazioni di ampiezza costante questo comportamento per $k > k_C$ vale senz'altro nel caso in esame; si verifica facilmente che esso vale anche per una disposizione qualsiasi di $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{B}_0$ (cfr. [1] Eq. (87) per il caso 1°, Eq. (99) per il caso 2°, Eq. (121) per il caso 3°).

Possiamo a questo punto trarre intanto le seguenti conclusioni:

I) il criterio di JEANS è strettamente legato al tipo di perturbazione cui si pensa soggetto il mezzo nel senso che al variare di esso varia il numero d'onda critico,

II) il tipo (12) di perturbazioni qui studiato, essendo $k_J > k_C$, agisce in favore della stabilità rispetto alle perturbazioni ad ampiezza costante. Precisamente, mentre per $k < k_C$ ($> k_J$) si ha instabilità (stabilità) per ambedue i tipi di perturbazioni, per $k_C < k < k_J$ si ha stabilità per le perturbazioni di tipo (12) e instabilità per quelle di ampiezza costante.

Appare ora opportuno esaminare il comportamento delle perturbazioni per $k > k_C$ nel caso di contemporanea presenza di campo magnetico e di rotazione (Caso 4°—), comportamento che, anche per ampiezze costanti, non sembra sia stato esaminato in [1] e [3].

Posto $\omega^2 = x$ la (17) diventa:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \tag{23}$$

in cui per $k > k_C$ risulta: $a_0 > 0$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$.

La (23), essendo i suoi coefficienti reali, se è:

$$(24) \qquad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$

dove $p = \frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3}\frac{a_1^2}{a_0^2}$, $q = \frac{2}{27}\frac{a_1^3}{a_0^3} - \frac{a_1 a_2}{3 a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}$, ha una radice reale, necessariamente positiva per (19), e due complesse coniugate. In questo caso abbiamo per ω due radici reali ed opposte ω_1 e $\omega_2 = -\omega_1$ cui corrisponde un modo di propagazione armonico puro e quattro radici complesse:

$$\omega_{3,4} = \pm R + iI, \; \omega_{5,6} = \pm R - iI,$$

a cui corrispondono i due modi di propagazione:

$$e^{-It} e^{i(\pm Rt - kz)}, \; e^{+It} e^{i(\pm Rt - kz)}$$

aventi la stessa velocità di fase reale ($v_f = \pm R/k$), ma uno dei quali ha ampiezza divergente nel tempo. Se è $\Delta < 0$ la (23) ha tre radici reali (di cui due eguali se è $\Delta = 0$). Osserviamo che in questo caso tutte le radici sono positive. Infatti consideriamo la funzione reale della variabile reale x:

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 .$$

È intanto:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \; f(0) = a_3 < 0;$$

risultando poi $f'(x)$ sempre positiva nell'intervallo $(-\infty, 0)$, si ha che $f(x)$ non può annullarsi in tale intervallo.

In conclusione anche nel caso 4° per $k > k_C$ non si possono presentare fenomeni di diffusione (la (17) non ammette mai per ω radici immaginarie pure); si ha però, qualora si verifichi la (24), un modo di propagazione con ampiezza che cresce esponenzialmente nel tempo.

In definitiva per il comportamento relativo ai $k > k_C$ possiamo concludere: se per instabilità secondo Jeans si intende, cfr. S. Chandrasekhar [1] p. 588, l'esistenza di almeno una perturbazione a velocità di fase immaginaria, allora per $k > k_C$ si ha stabilità in ogni caso; se invece, come appare più naturale, si intende che si ha instabilità quando almeno una perturbazione diverge nel tempo, allora nei primi tre casi si ha ancora stabilità, ma nel 4° si ha stabilità solo se non si verifica la (24) (5).

Per tutti i casi vale il risultato che per tutti i $k < k_C$ si ha almeno un modo di propagazione che degenera in un fenomeno diffusivo mentre per tutti i $k > k_C$ non si ha mai diffusione.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford 1961.

[2] A. G. PACHOLCZYK, *Sulla instabilità gravitazionale e magnetogravitazionale di sistemi compressibili*, « *Magnetofluidodinamica* », « Corso C.I.M.E. 1962, Ed. Cremonese, Roma ».

[3] S. CHANDRASEKHAR, *The gravitational instability of an infinite omogeneous medium when Coriolis force is acting and a magnetic field is present*, « Astrophy. J. », 119, 1954, p. 7-9.

[4] S. CHANDRASEKHAR, *The gravitational instability of an infinite homogeneous medium when a Coriolis acceleration in acting*, « Vistas in Astronomy » I, 1955, edited by A. Beer, Pergamon Press, p. 344-7.

[5] S CHANDRASEKHAR-E. Fermi, *Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field*, « Astrophy. J. », 118, 1953, p. 116-141.

[6] J. H. JEANS, *The stability of a spherical nebula*, « Phil. Trans. Roy Soc. (London), 199 1902, p. 1-53; cfr. anche: « Astronomy and Cosmogony », Cambridge 1929, p. 313.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 28 novembre 1966

(5) Si osservi che per $k < k_C$ si ha sempre instabilità sia per il primo che per il secondo modo di intenderla. Inoltre, mentre per $k < k_C$ si ha in tutti i casi instabilità qualunque sia il valore dei parametri Ω, A, a γ e ρ_0 e per qualunque k, l'eventuale instabilità del caso 4° per $k > k_C$ si ha solo per quei k che soddisfano la condizione (24) nella quale compaiono Ω, A, a, γ e ρ_0.