Bollettino Unione Matematica Italiana

Piero Bonera

Un teorema sui sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente e alcune sue applicazioni. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.2, p. 183–190.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_2_183_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Un teorema sui sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente e alcune sue applicazioni.

PIERO BONERA (Bologna) (*)

NOTA I

Sunto. - *In questa Nota si dimostra un teorema sui sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente, sfruttando un noto risultato recente, indi, applicando il teorema stesso, si giunge a una proposizione, che concerne le varietà di* SEGRE *e che completa un altro pur noto risultato recente.*

1. – Come è noto (1), un sistema lineare ∞^h di quadriche di S_r, con $h \geq r$, che abbia la matrice jacobiana (nulla identicamente) di caratteristica r, è composto con una congruenza lineare di S_1.

Una estensione del risultato prec. si ha nel seguente:

TEOREMA – *Condizione necessaria e sufficiente, affinchè un sistema lineare ∞^h di quadriche di S_r, con $h \geq r$, abbia la matrice jacobiana (nulla identicamente) di caratteristica $r'(\leq r)$, è che il sistema sia composto con una congruenza lineare di $S_{r-r'+1}$.*

La condizione è necessaria: invero, nello spazio S_r, dove x_0, $x_1, \ldots, x_r$ sian coordinate proiettive omogenee di punto, si assuma un *generico* punto, $\bar{x}$, e si osservi che lo spazio polare di $\bar{x}$, rispetto al sistema dato, Σ, è un $S_{r-r'}$, che non contiene il punto $\bar{x}$, questo non essendo base di Σ.

E basterà supporre, secondo precede, che sia $r' < r$; in tale ipotesi, si assuma entro la stella di centro $\bar{x}$ un generico $S_{r'}$ e si osservi che il punto, $\bar{x}'$, in cui si segano l'$S_{r'}$ e l'$S_{r-r'}$, è lo *spazio polare* di $\bar{x}$ rispetto al sistema lineare $\infty^{h'}$, Σ', che Σ segna sopra l'$S_{r'}$.

Se (come si supporrà) il riferimento proiettivo assunto in S_r è *generico*, potrà assumersi come spazio $S_{r'}$ il seguente:

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_{r-r'-1} = 0. \tag{1}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di Ricerca N. 26 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

(1) P BONERA, *Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente*, Boll. U.M.I., 1966, (3), vol. XXI, Note I (pp. 259-271) e II (pp. 385-394); cfr. Nota I, num. 10.

Ciò posto, se in Σ' (di $S_{r'}$) si assumono $h'+1$ quadriche:

$$f'_j(x_{r-r'},\, x_{r-r'+1},\, \dots,\, x_r) = 0 \qquad (j = 0,\, 1,\, \dots,\, h'),$$

indipendenti linearmente, e in Σ si considerano $h'+1$ quadriche:

$$f_j(x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_r) = 0,$$

che, segnando sopra l'$S_{r'}$ ordinatamente le precedenti, non contengono singolarmente l'$S_{r'}$ (e che, perciò, son indipendenti linearmente), sarà identicamente:

$$f'_j(x_{r-r'},\, \dots,\, x_r) \equiv f_j(0,\, \dots,\, 0,\, x_{r-r'},\, \dots,\, x_r)$$

e perciò anche:

$$\frac{\partial f'_j}{\partial x_i} \equiv \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right]_{x_0 = \dots = x_{r-r'-1} = 0} \qquad (i = r-r',\, \dots,\, r),$$

il secondo membro indicando il risultato della introduzione delle (1) nelle $\partial f_j(x_0,\, x_1,\, \dots,\, x_r)/\partial x_i$.

Allora la matrice jacobiana, J', di Σ', cioè la matrice:

$$J' \equiv \left\| \frac{\partial f'_j}{\partial x_i} \right\| \qquad (j = 0,\, 1,\, \dots,\, h';\ i = r - r',\, \dots,\, r)$$

potrà scriversi:

$$J' \equiv \left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right\|_{x_0 = \dots = x_{r-r'-1} = 0.}$$

Dunque, la matrice J' appartiene a quella ottenuta dalla matrice jacobiana, J, di Σ mediante la posizione (1).

Essendo la matrice J (nulla identicamente) di caratteristica r', segue che la matrice J' (di $h'+1$ orizzontali ed $r'+1$ verticali) non può aver la caratteristica maggiore di r'.

Nè la matrice J' può aver la caratteristica minore di r', altrimenti, lo spazio polare di $\bar{x}$, rispetto a Σ', sarebbe un S_d, con $d > 0$, anzichè un punto, precisamente il punto $\bar{x}'$.

Dovrà pertanto essere:

$$h'+1 \geq r'.$$

È da osservarsi, peraltro, che l'uguaglianza deve escludersi.

Invero, le quadriche di Σ, che hanno punto doppio in $\bar{x}$, formano un sistema lineare $\infty^{h-r'}$ (con $h > r'$) ed esse non possono tutte contenere l'$S_{r'}$, altrimenti, essendo questo generico entro la stella di centro $\bar{x}$, le quadriche predette sarebbero tutte indeterminate.

Pertanto il punto $\bar{x}$ è doppio per qualche quadrica di Σ' e quindi dovrà esser:

$$h' + 1 > r' .$$

Dopo di ciò, si conclude che la matrice J' è (nulla identicamente) di caratteristica r'.

Allora, come risulta dalla Nota I, cit. in (1), le quadriche di Σ', che contengono il punto $\bar{x}$, contengono tutte la retta $\bar{x}\,\bar{x}'$, ossia, com'è stato ricordato al principio, Σ' è composto con una congruenza lineare di S_1.

Subito deducesi che le quadriche di Σ, che contengono il punto $\bar{x}$, contengono tutte l'$S_{r-r'+1}$ congiungente lo spazio $S_{r-r'}$ e il punto $\bar{x}$, ossia che Σ è appunto composto con una congruenza lineare di $S_{r-r'+1}$.

La condizione è sufficiente: invero, si assuma in S_r un sistema lineare ∞^h di quadriche, con $h \geq r$, e si supponga che esso sia composto con una congruenza lineare di $S_{r-r'+1}$, essendo $r \geq r'$.

Allora un generico punto di S_r è doppio per almeno $\infty^{h-r'}$ quadriche del sistema e perciò la matrice jacobiana del sistema stesso ha, nel punto predetto, la carattesistica non maggiore di r'; ma neppure minore di r', altrimenti, per la dimostrazione più sopra svolta, il sistema sarebbe composto con una congruenza lineare di S_d, con $d > r - r' + 1$.

L'asserto è dunque completamente dimostrato [2].

2. - Qui e nei num.$^{\text{i}}$ seguenti verranno presentate successivamente due interessanti applicazioni del teorema del num. 1.

Riguardo alla prima, da un lavoro già citato emerge [3] che la varietà di SEGRE, data dal prodotto cartesiano di due spazi lineari sghembi S_{k-1} e S_{r-k} di S_r $(r > 3)$, con:

$$1 < k < r , \tag{2}$$

è la base d'un sistema lineare (completo) ∞^δ, $\Sigma_{(k)}$, di quadriche dell'S_h d'appartenenza, con:

$$\delta = \binom{k}{2}\binom{r-k+1}{2} - 1, \tag{3}$$

$$h = k(r - k + 1) - 1, \tag{4}$$

(2) Si veda anche: L. DEGOLI, *Sui sistemi lineari di quadriche di S_r a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica $\leq r$*, Atti Acc Sc .dell'Ist. di Bologna, Rend. Serie XI. Tomo X, (1963); cfr. num. 2.

(3) Cfr. (1), Nota II, num 17.

e che, chiamate $y_{uv}(u=0, 1, \dots, k-1; v=k, k+1, \dots, r)$ le coordinate proiettive omogenee di punto in S_h, il sistema $\Sigma_{(k)}$ è individuato dalle quadriche, che s'ottengono annullando tutti i minori del secondo ordine della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} y_{0k} & y_{0,k+1} & \dots & y_{0r} \\ y_{1k} & y_{1,k+1} & \dots & y_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{k-1,k} & y_{k-1,k+1} & \dots & y_{k-1,r} \end{matrix} \right\| . \tag{5}$$

Inoltre, dal lavoro sopra menzionato emerge[4] che, nel caso particolare:

$$k = 2,$$

nel quale le (3), (4) porgono risp.:

$$\delta = \frac{r(r-3)}{2},$$

$$h = 2r - 3,$$

la matrice jacobiana del sistema $\Sigma_{(k)}$ è (nulla identicamente) di caratteristica $2r-5$, cosicchè (num. 1) il sistema $\Sigma_{(k)}$ è composto con una congruenza lineare di S_3.

È dunque spontaneo chiedersi se esistano un valore di $r > 3$ e un valore di $k > 2$ tali, che il corrispondente sistema $\Sigma_{(k)}$ abbia la dimensione δ non minore della dimensione h dello spazio ambiente e la matrice jacobiana nulla identicamente, ossia tali, che la corrispondente varietà di SEGRE, considerata al principio, sia la base d'un siffatto $\Sigma_{(k)}$.

Se sì, il sistema $\Sigma_{(k)}$ suddetto, per il teorema del num. 1, sarà composto con una congruenza lineare di S_ρ, con $\rho \geq 1$, cosicchè da un generico punto dell'S_h ambiente uscirà almeno una corda della varietà di SEGRE suddetta.

Pertanto, ricordata la (4), sarà:

$$2r \geq k(r-k+1). \tag{6}$$

[4] Cfr. [1], Nota II, num^{i} 18 e 19

Se, ora, si osserva che la limitazione superiore delle (2) può scriversi:

$$k+1 \leq r,$$

ma che deve escludersi l'uguaglianza (5), si potrà porre:

$$r = k + 1 + \nu,$$

essendo ν un intero positivo (non nullo).

Dopo di ciò, mediante un'elementare discussione aritmetica risulta che le coppie (r, k), soddisfacenti la (6) e, secondo precede, le:

$$r > k+1, \; k > 2,$$

sono tutte e sole le seguenti:

a) $(5, 3)$;

b) $(6, 3)$;

c) $(6, 4)$,

le ultime due delle quali conducono a varietà di SEGRE proiettivamente identiche.

3. - Nel caso a), nel quale le (3), (4) porgono risp. $\delta = 8$, $h = 8$, la matrice (5), se in luogo delle $y_{uv} (u = 0, 1, 2;\; v = 3, 4, 5)$ si scrivono, in ordine arbitrario, le y_j $(j = 0, 1, \dots, 8)$, potrà più semplicemente scriversi (per es.):

$$(5') \qquad \left\| \begin{matrix} y_0 & y_3 & y_6 \\ y_1 & y_4 & y_7 \\ y_2 & y_5 & y_8 \end{matrix} \right\|,$$

onde la varietà di SEGRE, considerata nel num. 2, sarà, nel caso presente, la varietà, V, rappresentata dal sistema di equazioni:

$$q_j = 0 \qquad (j = 0 \; 1, \dots, 8),$$

essendo q_j il minore complementare di y_j nella matrice (quadrata) (5').

(5) Infatti, se fosse $k = r - 1$, l'S_{r-k} e l'S_{k-1} sarebbero risp. un S_1 e un S_{r-2} e quindi si ricadrebbe nel risultato già noto, più sopra ricordato (cfr. (1), Nota II, num. 15).

Ora si chiamino, ordinatamente, Σ, Σ_1, Σ_2 i seguenti sistemi lineari di quadriche:

$$\lambda^i q_i = 0 \qquad (i = 4, 5, 7, 8)$$

$$\lambda_1^s q_s = 0 \qquad (s = 3, 4, \dots, 8),$$

$$\lambda_2^t q_t = 0 \qquad (t = 1, 2, 4, 5, 7, 8),$$

il primo dei quali (che è ∞^3) è l'intersezione degli altri due (che son entrambi ∞^5), indi si osservi che le matrici jacobiane delle forme quadriche q_s e q_t risp. non sono nulle identicamente (come può accertarsi direttamente senza difficoltà).

Premesso ciò ed osservato che gli S_5 di equazioni:

$$y_0 = y_1 = y_2 = 0,$$

$$y_0 = y_3 = y_6 = 0$$

sono risp. immersi nelle varietà jacobiane dei sistemi Σ_1, Σ_2, un punto, P, dell'S_8 ambiente, che non sia base per alcuno dei sistemi Σ_1, Σ_2 e che del resto sia generico, non sarà doppio per alcuna quadrica dei sistemi predetti (e perciò neppure per alcuna quadrica del sistema Σ).

Orduuque, gli spazi (lineari) tangenti nel punto P risp. alle quadriche di Σ, Σ_1 e Σ_2, che contengono il punto stesso, son ordinatamente un S_5, τ, un S_3, τ_1, e un S_3, τ_2.

Si osservi, peraltro, che lo spazio τ sega il seguente S_3:

$$y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = y_6 = 0,$$

comune a tutte le quadriche $q_l = 0$ ($l = 1, 2, \dots, 8$), in un solo punto, Q, e che questo, pur giacendo in tutte le quadriche predette, non giace nella varietà V(6).

Perciò la retta PQ, giacendo in τ, è corda della varietà base di Σ, ma non della varietà V (se no, P sarebbe base per Σ, contro una prec. ipotesi).

(6) Le due affermazioni possono accertarsi algebricamente senza difficoltà.

Poichè, d'altra parte, la retta PQ non può esser corda impropria della varietà base di Σ[7], quello dei due punti d'appoggio, che è distinto da Q, non può giacere nell'iperpiano $y_0 = 0$ (altrimenti, ivi giacerebbe P) e quindi[8] esso giacerà in V.

Pertanto le quadriche di Σ_1 e quelle di Σ_2, che contengono P, contengono la retta PQ, la quale, in conseguenza, è comune agli spazi τ_1 e τ_2.

E si potrebbe provare che la retta PQ è anzi l'intersezione di τ_1 e τ_2.

Dopo di ciò, se da P uscisse almeno una corda della varietà V, tale corda dovrebbe giacere in uno solo degli spazi τ_1, τ_2.

Ebbene, se la corda suddetta giacesse, per es., in τ_2 (ma non in τ_1), P sarebbe doppio per qualche quadrica di Σ_1, contro un prec. rilievo.

Si conclude (num. 1) che la varietà V è la base d'un sistema lineare (completo) ∞^8 di quadriche a matrice jacobiana *non* nulla identicamente.

4. - Nel caso b), proiettivamente identico al caso c), le (3), (4) porgono risp. $\delta = 17$, $h = 11$ e la matrice (5), analogamente al caso a), potrà scriversi (per es.):

$$(5'') \qquad \left\| \begin{matrix} y_0 & y_3 & y_6 & y_9 \\ y_1 & y_4 & y_7 & y_{10} \\ y_2 & y_5 & y_8 & y_{11} \end{matrix} \right\| ,$$

onde la varietà di SEGRE, considerata nel num. 2, sarà, nel caso presente, la varietà, W, che annulla tutti i minori del secondo ordine della matrice (5'').

(7) Nell'ipotesi contraria, il punto P giacerebbe nell'iperpiano $y_0 = 0$: infatti, basta osservare che il punto Q è semplice per la quadrica generica di Σ (come emerge considerando la matrice jacobiana di Σ) e che l'iperpiano ivi tangente alla quadrica stessa è l'iperpiano $y_0 = 0$.

(8) Infatti, un punto dell'S_8, se annulla q_4, q_5, q_7, q_8, ma ha la coordinata y_0 non nulla, ossia se giace nella varietà base di Σ, ma non nell'iperpiano $y_0 = 0$, annulla (per un noto teorema sulle matrici nulle) la matrice (5'), ossia giace nella varietà V.

Nell'S_{11} d'appartenenza di W, dove le $y_j (j = 0, 1, \dots, 11)$ son coordinate proiettive omogenee di punto, si assuma l'S_8 di equazioni:

$$y_9 = y_{10} = y_{11} = 0$$

ed in questo si consideri la varietà, che annulla tutti i minori del secondo ordine appartenenti alle prime tre colonne della matrice (5''), cioè la varietà di SEGRE, che, nel caso *a*), si è chiamata V.

Pertanto la varietà W è immersa nella varietà, che si ottiene proiettando la varietà V dall'S_2 di equazioni:

$$y_0 = y_1 = \dots = y_8 = 0 .$$

Tutto ciò premesso, se da un generico punto di S_{11} uscisse almeno una corda della varietà W, proiettando dal suddetto S_2, risulta che da un generico punto del suddetto S_8 uscirebbe almeno una corda della varietà V, contro la conclusione del num. 3.

Si conclude (num. 1) che la varietà W è la base d'un sistema lineare (completo) ∞^{17} di quadriche a matrice jacobiana *non* nulla identicamente.

5. - Dai num.i 2, 3 e 4 discende dunque il risultato:

Le varietà di SEGRE, *che sian la base d'un sistema lineare di quadriche avente la dimensione non minore di quella dell'ambiente e la matrice jacobiana nulla identicamenle, son tutte e sole quelle date dal prodotto cartesiano d'un* S_1 *e d'un* S_{r-2} *sgembi di* S_r *e dai valori di* $r > 5$.

Pervenuta alla Segreteria dell'U.M.I. il 28 novembre 1966.