Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* Attilio Frajese, Platone e la matematica nel mondo antico, Ed. Studium, Roma, 1963 (F. G. Tricomi)
* Albert Maquet, L'astronome royal de Turin Giovanni Plana. Un homme, une carrière, un destin, Académie royale de Belgique, Classe des Sciences, Mémoires, Tome 36, 1965 (Pascal Dupont)
* N. Jacobson, Lectures in abstract algebra, Vol. III, Theory of fields and Golois theory, Van Nostrand Co., 1964 (Iacopo Barsotti)
* E. M. Patterson, D. E. Rutheford, Elementary Apstract Algebra, Oliver and Boyd, Edinburgh London, 1965 (C. Marchionna Tibiletti)
* L. Ross Shepley, Introduction to Ordinary Differential Equations, Waltham Mass. Blaisdell, 1966 (F. G. Tricomi)
* I. I. Hirschman, D. V. Widder, La trasformation de Convolution, Gauthier-Villars, Paris, 1965 (G. Da Prato)
* L. Nachbin, The Haar Integral, D. Van Nostrand, London, 1964 (G. Da Prato)
* S. Saks, A. Zygmund, Analytic Functions, PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1965 (Delfina Roux)
* Gaetano Fichera, Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems, Springer-Verlag, 1965 (Luciano De Vito)
* J. Abram, Tensor Calculus through Differential Geometry, Butterworths, London, 1965 (G. Capriz)
* P. S. Modenov, A. S. Parkhomenko, Geometric Transformations. Vol I: Euclidean and affine transformations, Vol II: Projective transformations, Academic Press, New York London, 1965 (E. Bompiani)
* H. Meschkowski, Non Euclidean Geometry, Academic Press, New York, 1964 (E. Bompiani)
* B. Segre, istituzioni di Geometria superiore, 3 volumi, Istituto Matematico "Guido Castelnuovo", Roma, 1965 (Leonard Roth)
* R. Campbell, La Cinématique, Presses Universitaires de France, Paris, 1966 (G. Capriz)
* A. Jeffrey, Magnetohydrodynamics, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1966 (Renato Nardini)
* Gh. Mihoc si, V. Urseanu, Matematici aplicate în statistică, Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1962 (Luciano Daboni)
* Joachim Piehler, Einführung in die Dynamische Optimierung, Teubner, Leipzig, 1966 (Eugenio Levi)
* Viktor M. Glushkov, Introduction to Cybernetics, Academic Press, New York London, 1966 (Antonio Pignedoli)
* M. Villa ed., Matematica moderna nelle scuole secondarie superiori, Patron, Bologna, 1966 (Marco Cugiani)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.1, p. 94–111.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_1_94_0>

RECENSIONI

ATTILIO FRAJESE, *Platone e la matematica nel mondo antico*. Roma Ed. Studium, 1963, pp. 218.

Questo volumetto — che si collega ad uno precedente, di titolo analogo, dello stesso A. (1) — si compone di due parti di estensione molto diversa, di cui la prima (di sole 50 pp.) è una specie di introduzione alla seconda e principale parte (più di 140 pp.) in cui vengono tradotti in italiano e commentati tutti i passi (in ordine cronologico) delle opere di Platone, che direttamente o indirettamente riguardano la matematica. In tal modo tali passi vengono posti a comoda disposizione anche di quelli che — come la più parte dei matematici — non avrebbero la possibilità o la voglia di andarli a cercare nelle edizioni globali dell'opera del grande filosofo greco.

Quest'antologia platonica offre l'occasione ad alcune osservazioni, forse non del tutto oziose, fra cui quella che, mentre al principio (p. es. nell'*Ippia maggiore*) il pensiero matematico di Platone è ancora piuttosto rozzo, più tardi (p. es. nel *Menone* e nella *Repubblica*) le cose migliorano e alcuni dei ragionamenti ivi fatti possono considerarsi come sostanzialmente corretti anche da un punto di vista moderno.

E poichè viviamo in tempi in cui si abusa della parola *democrazia* fino a farne venire disgusto, mi piace ricordare che in un passo de *Le leggi*, Platone sottolinea l'aristocraticità della matematica, cioè del fatto che (per usare le stesse parole del Frajese) « tutti possono, anzi debbono, acquistare cognizioni matematiche elementari, ma gli studi più elevati in questa materia son riservati a pochi ».

Quanto alla prima parte dell'operetta in esame, essa tratta principalmente degli *Elementi* di Euclide e della loro varia fortuna nei tempi, sottolineando alcune indubbie influenze platoniche in essi e riproducendo due ben noti scritti di F. Enriques in argomento. Viene inoltre riportato il celebre brano dei *Discorsi* di Galileo in cui — migliorando un ragionamento già sostanzialmente contenuto nel *Carmide* di Platone — si dimostra come (in linguaggio moderno) una parte di un insieme infinito può avere la stessa *potenza* del tutto.

F. G. TRICOMI

(1) A. FRAJESE, *La matematica nel mondo antico*. Roma, Universale Studium, n. 2, 1958.

ALBERT MAQUET, *L'astronome royal de Turin Giovanni Plana - Un homme, une carrière, un destin.* Académie royale de Belgique, Classe des Sciences, Mémoires, Tome XXXVI, fasc. 6, 1965 pp. 254.

Albert Maquet, letterato e filosofo, aveva già avuto occasione di occuparsi di Giovanni Plana per la semplice circostanza che questi fu amico di Stendhal, autore da lui assai studiato (v. nota p. 7). Ora Maquet ritorna ad occuparsi del Plana con questa Memoria di notevole mole, dove però non è la figura del Plana-matematico che viene presa molto in considerazione. In essa non vengono esaminati gli scritti matematici dell'astronomo piemontese, salvo, ben inteso, la « Théorie du mouvement de la Lune ». Lo scritto del Maquet è piuttosto una ricerca, fatta con estrema pazienza, talvolta persino troppo pedante, su tutte le vicissitudini della vita del Plana. A p. 19, per esempio, sia pur in nota, Maquet riferisce, non sappiamo con quale interesse per il lettore, che il giorno preciso della designazione, avvenuta nel 1803, del Plana alla Scuola d'artiglieria di Torino, è incerta: 19 marzo, 3 maggio o 23 maggio. Nelle pp. 22 e 23 vengono forniti dettagli sulla vita galante, o fors'anche libertina, del giovane Plana a Grenoble, Torino, Milano.

Non si pensi però che lo scritto del Maquet sia un semplice elenco di notizie senza alcun valore.

Molto apprezzabili ci sembrano le molteplici considerazioni di carattere generale che il Maquet fa spesso. Valga, ad esempio, questa introduzione a « L'élaboration du chef-d'oeuvre » (p. 105): « Dans le domaine de la science, come dans celui de l'art, le chef-d'oeuvre naît d'une étroite fidélité et de l'obstition. S'il prend parfois l'apparence fulgurante de l'éclatement, il ne s'en révèle pas moins en profondeur comme l'accomplissement d'une maturation plus ou moins longue et comme la chance d'une énergie créatrice qui, de tâtonnement en tâtonnement, a fini par trouver son point d'application et de rayonnement » e più avanti: « L'amitié s'enracine difficilement dans la compétition; elle s'épanouit, en revanche, dans la sympathie » (p. 117). Talvolta invece abbiamo poetiche considerazioni come la seguente: Plana aveva scritto: « Je désire pouvoir rêver à mon aise sur la théorie de la Lune » (p. 106), e Maquet commenta: « L'expression mérite qu'on l'épingle, car elle traduit bien plus qu'un projet, bien plus qu'un espoir longtemps caressé; l'émotion rare du chercheur à l'entrée du domaine inconnu, l'attirance singulière que subit l'explorateur face au mystère des terres élues par sa curiosité, le frémissement d'impatience du regard, en ce que son pouvoir de pénétration revendique de personnel, à la perspective de percer les enveloppement de la vérité ».

Il Maquet non fa in questa Memoria, in generale, della Storia della Matematica; si tratta piuttosto di una Storia del costume, di una storia aneddotica su Plana, i suoi amici e gli amici o parenti di questi.

Indubbiamente le pagine 82-104 sulla controversia Plana-Laplace meritano di essere conosciute; e queste possono interessare la Storia della Matematica. Le pagine, per esempio, sull'amicizia Plana-Paravia-Pellico, nel quadro della vita torinese prerisorgimentale, presentano un certo interesse per la storia del costume. Lo strano atteggiamento del Plana nei confronti dell'Accademia delle Scienze di Torino (p. 128) ed il risentimento ingiusto che coltivò durante una diecina d'anni, verso essa, può interessare la storia del carattere dell'astronomo piemontese, al pari della succitata controversia con il Laplace.

Un aspetto che vogliamo ancora segnalare di questo studio del Maquet è la ricerca, in verità un po' fantasiosa, fatta però con mano leggera, con tatto e senza eccessive pretese, di coincidenze (Plana nacque l'anno in cui morì Beccaria; Newton nacque l'anno in cui morì Galileo; « De tels aperçus ont sans doute encore le pouvoir de remuer au fond de chacun de nous un résidu de mentalité primitive; mais débouchant dans le mystère, ils n'exercent en somme que la séduction brève d'une voie sans issue », p. 11) di significati simbolici (« Un hasard plus prévenant que malicieux a placé l'un à côté de l'autre dans la galerie des gloires académiques au premier étage du palais de l'université de Turin, via Po, les bustes de Plana et de Carlo Boucheron. Voisinage symbolique, qui au soleil des morts semble animer l'impassibilité de leurs effigies d'un air de connivence et délivrer pour un instant le souvenir de leur belle amitié », p. 52), di analogie (la « Théorie du mouvement de la lune » riuscì « à voir le jour qu'à l'accession au trône d'un prince qui, loin d'épouser les vues obtuses de son prédécesseur, avait fait sien l'adage de son ancêtre Emanuele Filiberto: « Tanto è da più un uomo dell'altro quanto più cose sa ». Comme si à la lumière, il eût fallu la lumière, et que le lustre d'une telle souveraineté de l'esprit n'eût pu s'ajouter qu'au lustre d'un authentique esprit de souveraineté », p. 125).

Nell'insieme questa Memoria del Maquet merita di essere segnalata per il grande amore, obiettività e scrupolosità che in essa si trovano e come ricca fonte di notizie non solo sulla vita del Plana, ma più in generale sulla vita torinese di quel periodo nel quale stava maturando il nostro glorioso Risorgimento.

PASCAL DUPONT

N. JACOBSON, *Lectures in abstract algebra*, vol. III, Theory of fields and Galois theory. Van Nostrand Co., 1964, pp. xi+323.

Il contenuto dei capitoli è il seguente:

Cap. 1. - Inizia con la descrizione dell'algebra degli endomorfismi di un prolungamento di un corpo, che viene subito usata per dare la versione più facilmente dimostrabile del teorema di Galois-Jacobson (la versione in cui gli intercorpi sono collegati con certi sottoanelli dell'algebra degli endomorfismi tramite relazioni di commutatività). Il teorema viene poi specializzato nel senso del classico teorema di Galois, quando l'estensione sia separabile normale. Seguono il teorema delle basi normali, ed una breve e graziosa discussione di ciò che è ormai noto sotto il nome di « coomologia di Galois »; in questa si insiste soprattutto sui primi gruppi di coomologia, che sono poi gli unici che si abbia mai necessità di considerare; si introducono i sistemi di fattori, e si informa il lettore (per la prima volta, credo, in modo ufficiale) che un certo teorema viene talvolta chiamato « teorema 90 di Hilbert ».

Cap. 2. - Risolubilità delle equazioni per radicali, e teorema di Ruffini-Abel sulle equazioni generali di grado maggiore di 4.

Cap. 3. - Vi si descrive la struttura dei corpi ciclotomici, delle estensioni di Kummer, e delle estensioni p-abeliane; per queste ultime vengono introdotti i vettori di Witt.

Cap. 4. - Si introducono i prolungamenti trascendenti, e si dimostrano i classici risultati sull'argomento; la relazione di dipendenza algebrica viene trattata nell'ambito delle relazioni generali di dipendenza, introdotte nel primo volume. Per trattare i prolungamenti inseparabili si introducono le derivazioni e la p-dipendenza; si dimostra il teorema di Jacobson sui prolungamenti puramente inseparabili di esponente 1. Le successioni di iperderivazioni vengono appena accennate, e in nessun luogo viene dimostrato il teorema di Galois-Jacobson nella forma più utile per le applicazioni (la versione in cui gli intercorpi sono collegati con certi sottoanelli dell'algebra degli endomorfismi tramite relazioni di mutuo annullamento).

Cap. 5. - Teoria delle valutazioni, anche archimedee, ed anche non archimedee con gruppo valutante qualsiasi; completamenti dei corpi; lemma di Hensel; teorema di ramificazione, sia con l'uguaglianza che con la disuguaglianza.

Cap. 6. - Teoria dei corpi ordinati reali; teorema di Sturm; principio di Tarski-Seidenberg sui sistemi di equazioni e disuguaglianze nei corpi realmente chiusi, ed applicazioni alle algebre divisorie non necessariamente associative.

In complesso, è un volume di facile lettura (una volta fatta l'abitudine a vedere gli operatori scritti dopo gli operandi), molto concreto, e scevro di inutili virtuosismi; copre diversi punti (Galois-Jacobson, Witt, Kummer, Tarski-Seidenberg) che vengono generalmente omessi dai trattati a livello elementare; ha molti esercizi che spesso integrano il testo. Un piccolo neo, almeno per i lettori che hanno imparato l'inglese a scuola, è lo stile un po' garibaldino, che talvolta rende necessario rileggere una frase più volte per decidere, per esempio, quali siano le premesse e quali le conseguenze, ovvero per vedere se si stia dando la definizione di un nuovo simbolo o un teorema riguardante simboli già introdotti.

IACOPO BARSOTTI

E. M. PATTERSON, D. E. RUTHEFORD, *Elementary Abstract Algebra*, Olivier and Boyd, Edinburgh and London, 1965; pp. 1-VIII+1-211, 17 s. 6 d.

Nel presente volumetto sono esposte in forma semplice e piana, ma abbastanza rigorosa, le prime proprietà delle principali strutture algebriche.

Gli argomenti trattati, spesso con la sola presentazione delle definizioni e di poche semplici proprietà, sono i seguenti.

I. *Operazioni binarie*. Vengono illustrati i concetti di applicazione, relazione e legge di composizione in un insieme. Fra le relazioni sono indicate in particolare quelle di equivalenza e per le leggi di composizione sono riportate le abituali possibili proprietà.

II. *Gruppi*. Si introducono i concetti di semigruppo ed, a titolo di esempio, si accenna ai gruppi totali di sostituzioni su n elementi. Seguono i sottogruppi, i sottogruppi normali ed il gruppo quoziente. Infine si illustra il concetto di omomorfismo ed isomorfismo fra gruppi.

III. *Anelli. Domini d'integrità e campi*. Definiti gli anelli si considerano in particolare gli anelli di matrici. Seguono le definizioni e prime proprietà di campi e domini d'integrità. Si tratta dell'omomorfsmo fra anelli. Si dà infine un cenno sul concetto di caratteristica per un dominio d'integrità.

III. *Polinomi ed anelli euclidei*. Si introducono i polinomi su campi numerici dapprima e su anelli qualsiansi poi e si accenna alla serie di potenze su un anello. Per gli anelli euclidei si espone il problema della fattorizzazione unica. Si conclude il capitolo con le estensioni algebriche di un campo.

IV. *Spazi vettoriali*. Dopo aver commentato le proprietà dei vettori della Geometria elementare, si introduce il concetto di spazio vettoriale su un corpo e si trattano le questioni di dipendenza lineare e di dimensione. Si introducono gli spazi unitari (sul campo complesso o su un sottocampo di questo) come quegli spazi vettoriali in cui è assegnato un prodotto interno. Si accenna alle Algebre lineari (con la rappresentazione per matrici) ed alle Algebre di Lie.

Lungo l'esposizione sono dati vari esempi e si propongono parecchi esercizi dei quali sono riportate le risposte alla fine del testo.

Nella trattazione dei vari argomenti, di solito si illustrano preliminarmente concetti noti delle matematiche elementari e si ha cura poi di presentare le varie strutture algebriche come estensioni ed astrazioni rispetto a tali concetti.

Il testo è scritto in forma chiara ed ordinata e la sua lettura dovrebbe risultare molto agevole anche per chi ha una cultura matematica abbastanza modesta.

C. MARCHIONNA TIBILETTI

SHEPLEY L. ROSS, *Introduction to Ordinary Differential Equations*. Waltham, Mass. etc., Blaisdell, 1966, pp. VIII+337.

È uno dei tanti corsi elementari sulle equazioni differenziali ordinarie che si pubblicano negli Stati Uniti, dove corsi del genere sogliono far parte dell'insegnamento universitario propedeutico, cioè di quello che, fra noi, si svolge nel primo biennio.

Tale corso non è nè meglio nè peggio di altri consimili, ma l'esposizione (tenuta al livello più elementare possibile) è molto chiara e facile a seguirsi, sì che il libro può essere raccomandato ai principianti.

Come per lo più accade in libri di questo livello, la definizione di integrale generale ivi data non è pienamente soddisfacente, come, del resto, l'A. stesso implicitamente riconosce.

F. G. TRICOMI

I. I. HIRSCHMAN e D. V. WIDDER, *La transformation de Convolution*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.

In questo libro, traduzione dall'inglese dell'opera « The Convolution Transform » Princeton University Press, 1955 », si studia il problema dell'inversione di una trasformazione di convoluzione:

$$\rho - f$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-t)\rho(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\rho(x-t)dt \tag{1}$$

di nucleo G.

La (1) può scriversi formalmente in questo modo:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)(e^{-tD}\rho)(x)dt$$

essendo D l'operatore di derivazione

Posto allora:

$$(2) \qquad \frac{1}{E(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{-st} dt$$

si trova formalmente la formula di inversione

$$(3) \qquad \varphi = E(D)f .$$

In questo libro è studiato il caso in cui $E(s)$ è della forma:

$$(4) \qquad E(s) = e^{-cs^2+bs} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_k}\right) e^{s/a_k}$$

con b, c numeri reali e a tali che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2_k} < +\infty$$

in questo caso viene dato un senso rigoroso alla (3).

Viene inoltre mostrato che gli $E(s)$ della forma (4) caratterizzano i nuclei $G(t)$ diminutivi di variazione cioè tali che il numero dei cambiamenti di segno di $f(x)$ per $-\infty < x < +\infty$ non è superiore a quello di $\varphi(t)$ per $-\infty < t < +\infty$.

G. Da Prato

L. Nachbin, *The Haar Integral*. D. Van Nostrand, London, 1964.

Dopo aver esposto nel 1° Capitolo la teoria dell'integrazione negli spazi localmente compatti l'autore passa nel 2° Capitolo allo studio della esistenza e unicità dell'integrale di Haar su un gruppo topologico localmente compatto.

Vengono esposte sia la dimostrazione di A. Weil (basata sull'assioma della scelta) che quella di H. Cartan (più complicata ma che non fa uso dell'assioma della scelta).

Infine nel terzo capitolo vengono date condizioni per l'esistenza e unicità di integrali invarianti e relativamente invarianti su spazi localmente compatti omogenei.

Il libro è corredato da numerosi esempi.

G. Da Prato

S. Saks e A. Zygmund, *Analytic Functions*. Second edition enlarged, Monografie Matematyczne Tom 28, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1965, pp. IX+508.

Questo volume è la seconda edizione in lingua inglese di un'opera, pubblicata inizialmente in lingua polacca nel 1938 e già più volte ampiamente recensita (F.d.M. 64, II, p. 1048; Zbl. Math. 48, p. 308; Math. Reviews 14, p. 1073 e 31, n. 4889). Ci limitiamo quindi a brevi cenni sul contenuto.

Il volume consta di una introduzione (contenente elementi di teoria degli insiemi e di topologia) e di dieci capitoli. I primi sei riguardano i fondamenti della teoria delle funzioni di una variabile complessa: il metodo seguito è intermedio fra quello « alla Weierstrass », rigorosamente analitico, e quello « alla Cauchy », in cui si fa largo uso degli strumenti della geometria e della topologia. La trattazione presenta aspetti originali e molto interessanti (si segnala, in particolare, il procedimento col quale si perviene alla dimostrazione del teorema dell'integrale nullo di Cauchy).

I quattro capitoli successivi riguardano argomenti particolari e contengono risultati relativamente più recenti. Essi sono dedicati, rispettivamente, alle funzioni intere e meromorfe (Cap. VII), alle funzioni ellittiche (Cap. VIII), alle funzioni $\Gamma(s)$, $\zeta(s)$ e alle serie di Dirichlet (Cap. IX) e alle funzioni armoniche e subarmoniche (Cap. X). Quest'ultimo capitolo non compariva nelle precedenti edizioni.

Nel suo complesso, l'opera, oltre ad avere grande interesse come testo didattico, risulta di utile e piacevole lettura anche per chi ha già approfondite conoscenze nel campo delle funzioni analitiche.

DELFINA ROUX

GAETANO FICHERA, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture Notes in Mathematics n. 8, Springer-Verlag, 1965.

Il volume raccoglie le lezioni del Corso che l'A. tenne presso il Dipartimento di Meccanica della Johns Hopkins University di Baltimora, nella primavera del 1965. Lo scopo di tale Corso è quello di presentare ai cultori di Matematica applicata, e particolarmente agli studiosi di Meccanica, la teoria dei sistemi lineari a derivate parziali, di tipo ellittico, di ordine superiore, e dei relativi problemi al contorno, con speciale riguardo alle questioni connesse con le applicazioni alla Meccanica ed alla Fisica Matematica; particolare risalto è stato dato ai problemi di autovalori ed alle teorie relative alla loro approssimazione numerica, per difetto e per eccesso. L'impostazione del Corso trae partito dai principi e dai concetti generali dell'Analisi funzionale, che vengono — di volta in volta — rapidamente richiamati; appare, peraltro, evidente la cura posta dall'A. nell'evitare — anche in considerazione del pubblico al quale il Corso è destinato — quelle sovrastrutture analitiche, costituite da generalizzazioni non sempre essenziali e talora addirittura artificiose, alle quali talvolta si indulge nelle attuali ricerche sui sistemi ellittici.

Il Corso si compone di venti Lezioni. Nella prima vengono indicati esempi di equazioni lineari a derivate parziali, che risultano prive di soluzioni (tra i quali quello portato da Hans Lewy); vengono introdotte le nozioni di: « problema al contorno per un sistema lineare a derivate parziali », impostazione cosidetta « debole » di tali problemi, « problema ben posto »; l'A. chiama soluzione debole, oppure $\mathfrak{L}^2$-debole, di un problema al contorno per il sistema $Lu = f$, ogni $u \in \mathfrak{L}^2$ tale che $(u, L^*v)_{\mathfrak{L}^2} = (f, v)_{\mathfrak{L}^2}$ per ciascuna « funzione di prova » v appartenente ad una varietà $V \subset \mathfrak{L}^2$ opportuna; l'A. chiama « ben posto » un problema al contorno per un sistema lineare a derivate parziali quando, per esso, si abbia un teorema di esistenza nell'ipotesi che i « dati » soddisfino le condizioni necessarie di compatibilità (e nella Lezione 2 fa vedere che tale definizione è sostanzialmente equivalente a quella, classica, data da Hadamard); viene, da ultimo, costruito il « discriminante » di un problema al contorno, cioè una quantità reale non negativa, dipendente esplicitamente dall'operatore aggiunto L^* e dalla varietà V, la cui positività fornisce la condizione necessaria e sufficiente perchè il problema stesso sia « ben posto ». Nella seconda Lezione viene mostrato un principio di esistenza molto generale, il quale fornisce la condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione funzionale lineare abbia sempre soluzione comunque si fissi il termine noto, verificante le condizioni di compatibilità. La condizione in parola — che fu data dall'A. nel 1954 — consiste in una formula di maggiorazione; se tale formula di maggiorazione è soddisfatta, allora, oltre che l'esistenza di una soluzione, resta acquisita anche una formula di maggiorazione « duale » di quella da cui si era partiti per ipotesi (maggiorazione duale che, tra l'altro, esprime la « dipendenza continua delle soluzioni dal dato » inclusa, da Hadamard, tra i requisiti che un problema deve avere per potersi dire « ben posto »); se, viceversa, si possiede un teorema d'esistenza per un'equazione funzionale lineare in corrispondenza ad ogni scelta « compatibile » del « dato », si hanno — in conseguenza del principio esistenziale detto — la formula di maggiorazione necessaria e la sua duale; talchè quel principio si rivela anche assai utile per la dimostrazione stessa delle formule di maggiorazione ed è appunto questo l'aspetto particolarmente interessante (anche se non sempre chiaramente inteso) del carattere « necessario » (oltre che sufficiente) del principio esistenziale in discorso. Nella Lezione 3 vengono date le nozioni di derivate generalizzate e di spazio (di Hilbert) H_m delle funzioni aventi derivate generalizzate, fino all'ordine m incluso, appartenenti a $\mathfrak{L}^2$ e sono dimostrati i relativi teoremi di immersione (Lemma di Poincaré e principio di selezione di Rellich). Nella Lezione 4 è data la definizione di « operatore di traccia » per le funzioni di H_m e si dimostrano i Lemmi di Sobolev e di Ehrling relativi agli spazi H_m. Nella Lezione 5 si introducono gli operatori e i sistemi di tipo ellittico e si perviene ai teoremi di « regolarizzazione all'interno » per le soluzioni $\mathfrak{L}^2$-deboli dei problemi al contorno ad essi relativi. La Lezione 6 ha per oggetto i teoremi d'esistenza « in piccolo » di soluzioni di classe C^∞ dei sistemi ellittici che hanno termine noto e coefficienti in C^∞, e le formule di maggiorazione « a priori » per operatori ellittici. Nella Lezione 7 viene considerata la impostazione cosidetta « semidebole » per i problemi al contorno per sistemi ellittici di ordine $2m : Lu = f$, cioè l'impostazione in base alla quale ogni soluzione u è cercata tra le funzioni, di una varietà lineare $V \subset H_m$, tali che riesca $(\Phi(u, v) = (f, v)_{\mathfrak{L}^2}$ al variare di v in V, ove Φ è una forma bilineare dipendente da L e dalle particolari condizioni al contorno che si considerano (ad esempio, per il problema di Dirichlet, Φ coincide con l'ordinaria forma bilineare associata all'operatore L). Le soluzioni u del tipo ora detto, sono chiamate soluzioni « semideboli » oppure H_m-deboli. Vengono poi date condizioni per l'esistenza e l'unicità delle soluzioni H_m-deboli: una, necessaria e sufficiente, che si deduce dal principio esistenziale di cui alla lezione 2, e quella, soltanto sufficiente, cosidetta di « coercività », che pure viene rapidamente dedotta dal principio suddetto (viene anche portato un esempio per far vedere che quest'ultima condizione non è necessaria). Le Lezioni 8, 9 e 10 sono dedicate alla « regolarizzazione alla frontiera » delle soluzioni H_m-deboli per un generale problema al contorno relativo ad un sistema ellittico di ordine $2m$: $Lu = f$; in particolare si fa vedere che, se $f \in H_{l-2m}$. $l \geq 2m$, la soluzione u del problema appartiene ad H_l, in ipotesi opportune di regolarità per i coefficienti e per la frontiera del campo, e in ipotesi molto generali per la classe V (e quindi per le condizioni al contorno). La dimostrazione del teorema di regolarizzazione alla frontiera appare assai rapida ed agile, specie se confrontata con analoghe, anche molto recenti, trattazioni di altri Autori. Nella Lezione 10 viene introdotta la « trasformazione di Green » del problema e ne vengono mostrate le proprietà di compattezza, le quali consentono di applicare al problema d'autovalori, relativo all'operatore ellittico L nella varietà V, la teoria classica di Riesz-Fredholm. Vengono mostrate applicazioni alle equazioni integro-differenziali di tipo ellittico, considerate da Volterra nella teoria dell'elasticità ereditaria. Nella Lezione 11 si applicano i risultati precedenti allo studio dei problemi di Dirichlet, di Neumann, di « derivata obliqua » e « misto » per un'equazione ellittica di secondo ordine, con coefficienti di classe C^∞, giungendo fino ai teoremi d'esistenza delle soluzioni « in senso classico ». La Lezione 12 contiene una rapida trattazione dei tre problemi fondamentali per l'elastostatica lineare: quello del corpo elastico fisso al contorno, quello del corpo libero, e quello « misto », ed anche per questi problemi, applicando i risultati precedenti, si danno i teoremi d'esistenza « in senso classico ». Il Capitolo 13 è dedicato all'applicazione alla teoria delle piastre, (bordo incastrato, bordo libero, problema « misto »). Nella Lezione 14 si dà la nozione di sistema fortemente ellittico e si dimostra la diseguaglianza di Gårding per i sistemi fortemente ellittici, deducendone la positività (nel caso di operatori autoaggiunti) della corrispondente trasformazione (hermitiana e compatta) di Green; per la quale viene poi dato un assai interessante teorema di struttura che consente una formulazione di tipo assiomatico della teoria dei sistemi ellittici, analoga ad una sviluppata dall'A., nel 1960, per le forme differenziali esterne. Nella Lezione 15 è esposta rapidamente la teoria degli operatori T compatti e positivi in uno spazio di Hilbert (rappresentazione spettrale, proprietà variazionali di minimax degli autovalori etc.) e vi viene data un'elegante dimostrazione del teorema di Plancherel sulla convergenza del metodo di Rayleigh-Ritz per il calcolo per difetto degli autovalori di T Essa è fondata sulle proprietà della « componente » di T su una varietà di dimensione finita e sulla convergenza uniforme di tale componente verso T quando la varietà « invade » l'intero spazio. La Lezione 16 è dedicata all'esposizione dell'interessante teoria di Weinstein-Aronszajn sul calcolo per eccesso degli autovalori di un operatore compatto e positivo T (come è noto, tra il calcolo per difetto e il calcolo per eccesso degli autovalori della T, quest'ultimo è quello che presenta le maggiori difficoltà, sia teoriche che numeriche). Il metodo di Weinstein-Aronszajn consiste nella costruzione di una successione di « problemi intermedi », l'n-esimo dei quali è un problema d'autovalori per un operatore compatto e positivo T_n, che si ottiene da T_{n-1} con perturbazione di rango finito, e che, al crescere di n, converge uniformemente verso T; scegliendo opportunamente T_n si può inoltre fare in modo che il k-esimo autovalore $\lambda_k^{(n)}$ di T_n sia maggiore del k-esimo autovalore λ_k di T; ciò può ottenersi in più modi: o mediante l'impiego della nozione di successione monotona di operatori, come nel metodo di Aronszajn, oppure mediante quello di « componente » di un operatore relativa a un sottospazio, come nel metodo originario di Weinstein. Vengono poi esposti i metodi di Bazley (il cosidetto « method of special choise ») e quello di Weinberger (il cosidetto « method of truncation ») per il calcolo degli autovalori di T a partire da quelli di T_{n-1} Nella Lezione 17, l'A. dà un metodo molto generale, e assai interessante, per la costruzione dei « problemi intermedi » nella teoria di Weinstein-Aronszajn, il quale include gran parte dei metodi finora proposti: quello stesso, originario, di Weinstein, quello di Aronszajn (ai quali si è prima accennato) e alcuni di quelli successivamente adottati da Bazley e da Fox. Le rimanenti Lezioni sono dedicate alla esposizione di un metodo, recentemente dato dall'A., per il calcolo per eccesso degli autovalori degli operatori compatti positivi aventi una iterata dotata di « traccia » finita. Il metodo si fonda su una nuova caratterizzazione, rispetto al gruppo unitario, degli operatori del tipo sudetto. Tale caratterizzazione — illustrata nella Lezione 18 — è fatta mediante un sistema completo di invarianti ortogonali per l'operatore T; nella Lezione successiva si mostra come la conoscenza di uno qualsiasi di tali invarianti consenta il calcolo per eccesso di tutti gli autovalori di T. È quindi considerato il problema della rappresentazione di detti invarianti, che viene risoluto sia mediante sviluppi in serie, sia mediante formule integrali. L'ultima Lezione è dedicata ad una teoria — formulata dall'A. — della rappresentazione della funzione di Green per i problemi al contorno relativi a sistemi lineari ellittici, la quale si presti all'applicazione del metodo degli invaranti ortogonali per il calcolo degli autovalori.

I risultati ai quali l'A. perviene sono del più alto interesse per la loro eleganza e semplicità; basta, a tal proposito, citare le applicazioni contenute nelle ultime pagine del Corso, nelle quali si fa vedere come sia possibile costruire « in forma chiusa » gli elementi della successione approssimante per difetto *ogni* autovalore di taluni classici problemi della Fisica Matematica (elasticità bi e tri-dimensionale, membrana fissa al bordo, piastra totalmente incostrata, « buckling » delle piastre incastrate). Indubbiamente questi sono risultati che, solo pochi anni addietro, appariva improbabile potessero venire conseguiti, data la gran mole di studi che eran già stati dedicati al problema del calcolo rigoroso degli autovalori.

LUCIANO DE VITO

J. ABRAM, *Tensor Calculus through Differential Geometry*, Butterworths-London, 1965, pp. 1-170, 37 s. 6 d.

Questo volumetto si inquadra in una collana di testi che sono dedicati agli studenti universitari ed hanno lo scopo di introdurre un campo di studio presumendo il minimo di conoscenze specifiche. In questo senso mi pare vada intesa l'affermazione dell'editore, premessa (presumibilmente a scopo elogiativo) nella copertina, che il volumetto contiene una esposizione del calcolo tensoriale a livello terra-a-terra. In effetti il testo si legge bene, ed a questo fine aiuta anche la nitida impostazione tipografica; questo è un pregio non trascurabile se si ha presente la noia che di solito pervade gli studenti che devono famigliarizzarsi col calcolo tensoriale al livello operativo elementare. Il contenuto, visti gli scopi, non poteva essere che classico; ecco i titoli dei capitoli: Introductory concepts - The Two-dimensional Curved Surface - Special Results - Some Riemannian Geometry - Differential Geometry - Further Differential Geometry - Applications of Tensor Methods to the Mechanics of Continous Media - Applications of Tensor Methods to Dynamics.

G. CAPRIZ

P. S. MODENOV e A. S. PARKHOMENKO, [Academic Paperbacks, New York and London, 1965, pp. 160+136, $ 4.90]. *Geometric Transformations*. Vol. 1: *Euclidean and affine transformations;* Vol. 2: *Projective transformations.*

Il contenuto di questi due volumi (tradotti dal russo) è chiaramente indicato dai rispettivi sottotitoli. Conviene perciò indicare piuttosto il metodo e gli scopi che essi si propongono.

Dopo un breve capitolo introduttivo su insiemi, funzioni, mappe e gruppi di trasformazioni, due capitoli (del primo volume) sono dedicati alle trasformazioni ortogonali (cioè conservanti le lunghezze) e alle similitudini nel piano (e nello spazio) euclideo, e uno al piano affine (con la classificazione affine delle coniche). Il metodo è generalmente sintetico ed elementare, non senza un cenno della rappresentazione con le coordinate. L'accento è posto sulle trasformazioni elementari di cui una più generale può considerarsi prodotto. Chiude il primo volume un'appendice su un elegante risultato di P. Zvengroski sulle mappe che conservano una determinata lunghezza (che risultano essere ortogonali).

Nel secondo volume (cap. I) il piano proiettivo è presentato prima attraverso i modelli usuali per arrivare poi ad una definizione assiomatica e definire una mappa proiettiva: seguono i consueti sviluppi (teorema di esistenza e d'unicità, birapporti, gruppi armonici, coordinate proiettive, coniche) e una breve estensione allo spazio proiettivo.

Ancora al piano proiettivo si riferiscono due appendici, una sulla sua topologia e l'altra sul principio di dualità.

In modo analogo (nel cap. II) si passa dal piano euclideo a quello conforme con l'aggiunta di un punto speciale; e si dimostra il teorema fondamentale sulle trasformazioni circolari (come prodotti di una similitudine ed una inversione).

Come si è detto il metodo è generalmente elementare. Quanto allo scopo, questi volumetti sono pensati non come libri di testo per un determinato anno di studio ma come materiale di riflessione o per seminari dagli ultimi anni di liceo ai primi di università per l'indirizzo didattico (più o meno equivalenti al teacher-training college).

Oggi che anche in Italia si tende a dare un ruolo essenziale alle trasformazioni già dai primi studi di geometria questi due volumetti possono avere una utile funzione anche in Italia, sia per la preparazione dei docenti sia per gli allievi meglio dotati.

E. BOMPIANI

H. MESCHKOWSKI, *Non Euclidean Geometry*. Academic Paperbacks, Academic Press, New York, 1964, pp. VIII+104, $ 2.45.

È questa la traduzione inglese della seconda edizione di un analogo volumetto tedesco. In un centinaio di pagine di questa edizione tascabile il Meschkowski riesce a dare un'esposizione brillante e incisiva della Geometria non-euclidea. Un primo breve capitolo, a carattere introduttivo, su dimostrazioni e definizioni, è una specie di ripensamento sul valore di queste condotto su un esempio familiare: il teorema di Pitagora. Il ripensamento stringato, quasi una *cross-examination*, conduce necessariamente a riconoscere il compito fondamentale degli assiomi. Il secondo capitolo espone appunto, con lievi ritocchi, il sistema di assiomi hilbertiano (connessione o appartenenza, ordine, congruenza. continuità, parallelismo). Una sguardo a volo d'uccello (Cap. III) sui duemila anni di tentativi per « dimostrare » il postulato V, senza trascurare gli sforzi costruttivi di Saccheri e di Legendre, porta alla soglia del periodo moderno: Gauss, Bolyai, Lobachevsky.

L'Autore per ragioni didattico-intuitive preferisce alla costruzione assiomatica quella del « modello » di Poincaré nel piano euclideo: ad esso prepara il cap. IV con nozioni elementari sui fasci di cerchi, sull'inversione e sul birapporto.

Queste nozioni sono utilizzate nel cap. V per introdurre in modo nuovo, reale ed elementare, la metrica iperbolica nel semipiano di Poincaré e per mostrarne l'invarianza in determinate operazioni elementari. Verificato che la geometria così definita soddisfa agli assiomi hilbertiani ad eccezione di quello delle parallele si sostituisce a questo l'altro sull'esistenza di almeno due rette per un punto parallele ad una data e si ha la geometria iperbolica che si attua appunto sul semipiano di Poincaré. Nel Cap. VI sono dati i teoremi fondamentali (p. es. uguaglianza di triangoli con gli stessi angoli) e nel Cap. VII varie costruzioni fondate su di essi. Anche la trattazione della trigonometria del piano iperbolico attraverso le costruzioni eseguibili nel piano euclideo supporto del semipiano di Poincaré è del tutto elementare.

Un breve cenno (Cap. IX) è fatto della geometria ellittica o partendo dalla sfera (coppie di punti diametralmente opposti e cerchi massimi sono punti e rette della nuova geometria) o dal modello piano che se ne ottiene per proiezione stereografica.

L'epilogo (Cap. X) è un brevissimo accenno al dissidio fra logici e intuizionisti per una più ampia esposizione del quale l'A. rimanda ad un altro suo libro (1).

Chiude questo eccellente volumetto una breve sostanziosa bibliografia e un indice degli argomenti.

E. Bompiani

B. Segre, *Istituzioni di Geometria superiore*, 3 volumi, con supplemento, Roma, Istituto Matematico « Guido Castelnuovo, 1965.

I tre volumi formanti il presente trattato sono basati sulle lezioni — qui redatte con cura assidua dal dott. P. V. Ceccherini — che l'A. ha tenuto all'Università di Roma durante l'anno accademico 1963-4. Essi possono venir collegati ai due volumi, già pubblicati, in cui erano raccolte le lezioni del 1961-2. In tutto si tratta di un complesso di concetti, problemi e risultati che risalgono alla prima edizione delle *Lezioni di geometria moderna* (1948) ed alle *Arithmetical Questions on Algebraic Varieties* (1951), nonchè una serie imponente di Memorie e monografie. Tema principale è la geometria algebrica a struttura finita che, come vedremo, oltre al suo valore intrinseco, va acquistando interesse nelle applicazioni della geometria alla matematica pratica. (A proposito, va notato che, già nel volume del '51, l'A. considera vari problemi geometrici sui campi finiti).

Il primo dei tre volumi intitolato *Strutture algebriche*, (400 pagine) consta di una limpidissima esposizione delle classiche nozioni algebriche — gruppo, anello, corpo, campo — con speciale riguardo ai casi finiti. Il secondo volume (300 pagine) tratta degli spazi proiettivi, particolarmente nel caso finito, e riproduce i complementi e le esercitazioni tenute dal prof. G. Tallini sulla scorta del trattato dellA., *Lectures on Modern Geometry* (1961), il quale costituisce uno sviluppo e una rielaborazione del lavoro citato del '48. Qui il lettore troverà una lucida introduzione alla teoria degli spazi lineari sopra un corpo qualunque, con applicazioni alle coniche ed alle quadriche, ed anche agli spazi grafici e fibrazioni: tutta materia che sarà utile in seguito.

Dopo questi preliminari veniamo al terzo volume (350 pagine) che porta il titolo, *Complessi, reti, disegni.* Ma questo non dà che una pallida idea del contenuto; a dire la verità, si tratta di un lavoro quasi interamente originale e così ricco di risultati che difficilmente può venir riassunto. In linea di massima possiamo dire che l'A. ha saputo adattare, con mano felice, una serie di concetti e teoremi appartenenti alla geometria classica a quella finita: ad esempio, la geometria algebrica sul campo complesso, la geometria differenziale sul campo reale, e la topologia combinatoria. Partendo da quest'ultima, egli introduce e studia i complessi costruiti su terne del tipo $K=(P, R, I)$, ove I denota un sottoinsieme del prodotto cartesiano $P \times R$ (essendo P un piano concepito quale insieme di punti e R un insieme di rette). Poi si passa ai complessi di blocchi e le loro matrici d'incidenza, così seguendo le orme tracciate dal Poincaré nel caso classico.

Una seconda idea, qui trasportata nella geometria finita del piano, è quella dei sistemi algebrici di curve giacenti su una superficie algebrica, e

(1) Tradotto in italiano da L. Lombardo Radice col titolo: *Mutamenti nel pensiero matematico* (Edit. Boringhieri, 1963).

particolarmente i fasci e le reti, con speciale riguardo alle nozioni di curve generatrici e curve unisecanti. Un terzo tema è stato suggerito dalle ricerche del Blaschke sui 3-tessuti di curve sopra una superficie analitica. Tutti questi temi vengono svolti con semplicità ed eleganza, e trovano applicazioni geometriche ai piani affini e alle quadriche definite su campi finiti.

Comunque, quel che dovrà sorprendere il lettore è il fatto che il materiale del terzo volume è strettamente collegato con applicazioni odierne dell'analisi combinatoria, anch'essa giudicata, ai primordi della scienza, come una specie di divertimento matematico, non solo di scarso interesse tecnico ma anche priva di qualsiasi applicazione alla vita di ognigiorno. Difatti, in un primo tempo, la costruzione di quadrati latini, nonchè altri problemi consimili, venivano considerati giochi appena degni di matematici piuttosto frivoli (tra quali il Sylvester): e per l'appunto il più famoso problema del genere — quello del matematico inglese Kirkman — è stato enunciato, ed è tuttora noto, come quello delle quindici ragazze di un collegio. Ed il contributo fondamentale a quella disciplina, che è il paio di volumi del MacMahon sull'analisi combinatoria, quando apparve 50 anni fa, fu ammirato per l'ingegnosità dell'autore, ma probabilmente non fu stimato al suo giusto valore. Del resto il MacMahon, che era ex-ufficiale dell'esercito britannico, aveva l'abitudine di citare versi poetici, alla maniera di Sylvester: indizio questo di poca serietà.

Però in quell'epoca un altro matematico inglese stava costruendo una scienza, a scopi prettamente pratici, in cui il problema di Eulero concernente i 36 ufficiali, quello del Kirkman sopranominato, i cosidetti sistemi di Steiner, nonchè i quadrati latini di MacMahon, ed altri passatempi, venivano inquadrati e generalizzati in modo da costituire una importante unità organica. È appunto alla insigne figura di R. A. Fisher (anch'egli esperto nell'arte di adattare metodi geometrici ai suoi problemi) che dobbiamo una parte notevole della teoria generale della statistica moderna, e specialmente quella sezione che si occupa del disegno di esperimenti sia in biologia che in agricoltura. Ora in tale teoria il maneggiamento dei blocchi è operazione di primaria importanza.

Con rara perspicacia Segre ha potuto raccogliere, nel suo trattato, i problemi aritmetici-numerativi di cui abbiamo parlato, e poi tradurli nel linguaggio della geometria finita. E dopo ciò egli ha saputo applicare una tecnica geometrica, essenzialmente di sua creazione, alla generalizzazione e, talvolta, anche alla soluzione, di importanti questioni nel campo combinatorio. Tra i risultati più interessanti è da segnalare il problema generale delle configurazioni geometriche, il quale comprende come caso speciale il problema di Kirkman esteso in vari modi. Per risolvere una delle suddette estensioni l'A. ha avuto ricorso alla teoria di quelle curve che, in una Memoria recente di grande portata, egli ha chiamato hermitiane; tali curve nascono spontaneamente dalla estensione della classica nozione di forma hermitiana che si ottiene sostituendo il solito campo con un campo finito di ordine p^{2k} (con p primo e $k \geq 1$).

Il presente trattato desterà senza dubbio vivo interesse nel mondo delle matematiche pure; però c'è da augurarsi che, nonostante la veste geometrica, esso venga letto ed assimilato da ricercatori in quei campi della matematica sperimentale dove è atto a dare una visione nuova e panoramica dei problemi, difficili e non ancora risolti, quali oggi si presentano nella statistica. Osserviamo a proposito che alcuni dei discepoli di Segre hanno già cominciato a studiare tali questioni, tra cui la teoria dell'informazione, che occupa attualmente un posto predominante tra le scienze applicate. Altri suoi allievi hanno contribuito un volumetto di appunti come appendice ai tre volumi del trattato propriamente detto.

Come giustamente dice l'A., la teoria dei complessi è stata finora abbastanza trascurata e ciò per due ragioni tra loro opposte. Mentre da una parte la teoria sembra, a prima vista, poco ricca di contenuto, dall'altra appare anche troppo ricca in quanto una estrema generalità potrebbe condurre a vaste ed indeterminate considerazioni di natura astratta. Quale controesempio possiamo citare, con Segre, il fatto che, con le notazioni matriciali inerenti alla teoria dei complessi di blocchi, si potrebbe rappresentare in forma concisa l'intera collezione di tutte le biblioteche del mondo. Ma, a nostro parere, il controesempio più convincente è fornito dal presente lavoro.

LEONARD ROTH

R. CAMPBELL, *La Cinématique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1966, pp. 123.

È il titolo 1204 della collezione « Que sais je? », dove fa da compagno ad una trentina di altri fascicoletti di argomento matematico destinati ad ampia diffusione. Anche in Italia si vendono ormai nelle edicole gli « Argomenti di matematica » pubblicati dal Progresso Tecnico Editoriale. Ma l'analogia più stretta questa serie francese l'ha con la vecchia collezione di Sonzogno.

Gli argomenti sviluppati sono classici e lo stile è un pò quello dei ripetitori per studenti. Ecco i titoli dei capitoli: Cinématique du point - Cinématique du solide - Etude du champ des vitesses et des accélérations des différents points d'une solide - Composition des mouvements et applications - Mouvement plan sur plan - La cinématique de la relativité restreinte - Cinématique des fluides.

G. CAPRIZ

A. JEFFREY, *Magnetohydrodynamics*. University Mathematical Texts, n. 33, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1966, pp. VIII+252, 13 s. 6 d.

Questo libro si propone di esporre le principali nozioni di magnetofluidodinamica (MFD) in modo semplice e con sufficiente rigore, limitandosi allo schema del continuo; è scritto prevalentemente per studenti che sull'argomento desiderino acquistare senza eccessiva difficoltà una sia pur limitata cultura ed anche una buona base per affrontare testi più ardui; si presuppone soltanto la conoscenza del calcolo vettoriale e delle equazioni di Maxwell. Gli argomenti trattati sono: Equazioni fondamentali della MFD e condizioni al contorno. Fluidi incompressibili. Onde e teoria delle caratteristiche. Onde d'urto. Moti stazionari.

Alla fine di quasi tutti i capitoli c'è un paragrafo con esercizi e complementi.

Si può affermare che lo scopo didattico del libro è pienamente raggiunto.

RENATO NARDINI

GH. MIHOC și V. URSEANU, *Matematici aplicate în statistică*. Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1962, p. 731, Lei 34,70.

Oggetto di quest'Opera è la illustrazione di metodi matematici per la trattazione di problemi di Statistica economica.

Dopo una premessa, piuttosto ampia, di Calcolo delle probabilità e statistica metodologica generale, gli Autori trattano l'analisi delle serie temporali, la teoria dei numeri indici (con particolare enfasi), i metodi di campionamento.

Un'ultima parte, la cui estensione giudichiamo troppo ristretta, è dedicata a questioni che gli A classificano come « metodi moderni di calcolo statistico » — e vi si prendono in esame: numeri pseudo aleatori e loro impiego in classici problemi trattati con metodi montecarlo, programmazione lineare (con brevissimi cenni alle generalizzazioni: programmazione stocastica e programmazioen dinamica), problema dei trasporti, schemi di interdipendenze aziendali.

La mole dell'Opera è notevole anche perché il discorso, costantemente corredato da esemplificazioni numeriche, è tenuto ad un livello piano con dettagliato sviluppo dei procedimenti di calcolo.

LUCIANO DABONI

PIEHLER JOACHIM, *Einführung in die Dynamische Optimierung.* Teubner, Leipzig, 1966, pp. 67, DM 6,80.

La programmazione dinamica è un metodo (o complesso di metodi) per determinare una politica ottima in un problema di decisione che sia (o possa essere considerato) a più stadi. Fondamentale è in proposito l'opera del Bellman (Dynamic Programming, Princeton 1957).

Questo volumetto si prefigge di dare alcune informazioni essenziali su tali metodi, senza trascurare l'enunciazione e la dimostrazione dei principali teoremi.

Nel primo capitolo vi è una esposizione sommaria dei tipi di problemi a cui il metodo è applicabile, e l'enunciazione del « principio di ottimalità » del Bellman. Nel secondo l'A. tratta dei problemi discreti, deterministici e stocastici, con particolare riguardo ai processi di decisioni markoviani: da rilevare l'esposizione di un metodo di Howard per i processi markoviani stazionari. Il terzo capitolo è dedicato ai problemi continui, fra i quali i ben noti problemi di calcolo delle variazioni, risolubili con la programmazione dinamica.

L'ultimo capitolo contiene tre esempi, di cui uno tratto dalla chimica, gli altri di carattere economico (problemi di scorte e di rinnovamento) molto elementari.

EUGENIO LEVI

VIKTOR M. GLUSHKOV, *Introduction to Cybernetics.* p. 322, Ed. Academic Press, New York-London, 1966, trad. in inglese dal russo a cura di « Scripta technica inc. » (senza indicazione di prezzo).

L'opera consta di sei capitoli, preceduti da una prefazione illustrante gli scopi ed i caratteri della trattazione, e seguiti da un elenco di referenze bibliografiche e da un indice. Il primo capitolo è dedicato alla « teoria astratta degli algoritmi » e consta di cinque paragrafi. Vien fatto di fermare l'attenzione sul terzo, nel quale viene descritto un metodo molto generale di definizione degli algoritmi suggerito da *Kolmogorov* e da *Uspenskiy.*

Nella costruzione del loro schema algoritmico, tali autori fanno uso soltanto di proprietà che sono invariabilmente applicabili ad ogni schema algoritmico. Nel quarto paragrafo vengono considerati altri schemi algoritmici teorici.

Il secondo capitolo dell'opera concerne le « funzioni booleane ed il calcolo delle proposizioni ». Consta di cinque paragrafi dedicati rispettivamente alle funzioni booleane, all'algebra di Boole, agli insiemi completi di operazioni booleane, all'applicazione dell'algebra di Boole alla teoria delle « reti », cioè a quei semplici sistemi tecnici che servono per la trasformazione della « informazione discreta »; infine al calcolo delle proposizioni. Nel capitolo terzo appare esposta la teoria degli automatismi, dai concetti essenziali relativi agli automatismi astratti, alla rappresentazione degli eventi negli automatismi, alla considerazione dei cosiddetti « automatismi finiti ». Il quarto capitolo concerne i sistemi « autoorganizzantisi » (qui un paragrafo è dedicato a richiami di calcolo delle probabilità). Il terzo paragrafo del capitolo di cui stiamo parlando riguarda le valutazioni quantitative negli automatismi in parola. Precisamente ci si occupa della misura quantitativa della autoorganizzazione e dell'« automiglioramento » negli automatismi, basandosi sul concetto meccanico-statistico di entropia. Il quarto paragrafo è dedicato agli automatismi con transizioni aleatorie e vi appaiono, quindi, alcune proposizioni fondamentali relative alle catene di Markov. Il capitolo si conclude con considerazioni relative al cosiddetto « auto-accomodamento » ed a problemi di ottimizzazione.

Va segnalato che la materia trattata nel capitolo quarto, cui in questo momento si rivolge la nostra attenzione, si può considerare connessa ai « Principi di neurodinamica » di F. Rosenblatt.

Il quinto capitolo del volume è articolato su cinque paragrafi e riguarda la progettazione in senso generale dei calcolatori elettronici « digitali » e la « programmazione » nei medesimi. Particolare attenzione viene rivolta, in tale capitolo, al linguaggio universale algoritmico « Algol 60 ». Vengono dati anche esempi di programmazione « Algol » con particolare riguardo ai sistemi autoorganizzantisi. Il sesto ed ultimo capitolo del volume è dedicato al « calcolo dei predicati » e alla formulazione e dimostrazione automatiche di teoremi nelle teorie deduttive. Va segnalato, in particolare, il secondo paragrafo del capitolo in questione, concernente il celebre teorema di Gödel sulla incompletezza della Aritmetica.

L'interessante volume trae origine da lezioni tenute dall'autore, su argomenti ed aspetti vari della Cibernetica e della Logica matematica, presso l'Università di Kiev e costituisce una delle esposizioni più organiche esistenti a tutt'oggi in materia di Cibernetica.

ANTONIO PIGNEDOLI

« MATEMATICA MODERNA nelle scuole secondarie superiori », a cura di M. Villa - Articoli di: M. Baldassarri, P. Buzano, L. Campedelli, L. Daboni, G. Evangelisti, U. Morin, G. Ricci, M. Villa, T. Giola. Ed. Patron, Bologna (1966), pp. XVIII+595, L. 7.500.

È una collezione di articoli a carattere didattico, dedicato agli insegnanti delle classi pilota delle scuole secondarie superiori e più in generale a tutte le persone di media cultura matematica a cui stia a cuore il profondo rinnovamento che si sta operando nell'insegnamento delle discipline matematiche nell'ambiente delle scuole secondarie.

Tale rinnovamento è orientato soprattutto su due direttrici. Una si rivolge al problema di accostare i giovani, fin dal momento della loro prima formazione culturale, alle idee più essenziali della matematica, a quelli che secondo un più moderno modo di vedere si sogliono riguardare come i fondamenti della matematica stessa. In corrispondenza di questo aspetto troviamo, fra quelli qui presentati, alcuni articoli dedicati all'algebra astratta, alla topologia, alla teoria degli insiemi, e persino ad alcune tecniche della logica formale, quelle almeno che interessano più da vicino la costruzione del pensiero matematico.

Un'altra direttrice di tale rinnovamento è rivolta invece ad un potenziamento degli aspetti tecnici e applicativi della matematica, quelli che più particolarmente ne determinano l'elevato valore sociale e il profondo inserimento nel vivo del processo produttivo del mondo moderno.

E a questo proposito troviamo ad esempio articoli dedicati alla programmazione lineare o agli elaboratori elettronici.

Alcuni articoli poi, come quello sulla geometria elementare, quello sulla trigonometria o sul calcolo delle probabilità riguardano argomenti già classici nell'insegnamento impartito alla scuola secondaria; qui ne appare rinnovato il metodo di esposizione e anche la profondità di trattazione per renderla più adeguata a quello che dovrebbe essere nell'insieme il nuovo livello espositivo della scuola secondaria superiore.

Altri articoli infine, come quello sulle serie di Fourier, o sui gruppi di trasformazioni, riguardano argomenti già classici nei corsi universitari che qui si espongono ad un livello adatto alla scuola secondaria nella quale insegnamenti di questo tipo dovrebbero ormai trovar posto in armonia col nuovo tono che a tale ordine di scuole si intende conferire.

Gli articoli sono rivolti, come si è detto, soprattutto agli insegnanti di scuole medie, tuttavia l'esposizione raggiunge in molti casi una tale chiarezza e linearità che il testo potrebbe essere direttamente utilizzato per l'insegnamento medio; esso è tale cioè da poter esser seguito direttamente dagli studenti stessi, con l'aiuto di un commento da parte dell'insegnante.

Naturalmente, nonostante il generoso sforzo didattico compiuto in ogni caso dagli autori, non per tutti gli argomenti è stato possibile raggiungere una così felice forma espositiva. In molti casi il tono della esposizone ha dovuto esser tenuto ad un livello che rende sconsigliabile l'utilizzazione diretta dell'articolo da parte degli studenti, almeno di quelli di levatura non eccezionale.

Tutti gli articoli comunque, anche quelli più impegnativi sul piano concettuale, possono essere seguiti senza sforzo da un qualunque lettore in possesso di quelle nozioni di matematica che vengono mediamente impartite nei primi bienni dei nostri corsi di laurea in matematica, o in fisica, o in ingegneria.

La lettura di questo libro si raccomanda quindi non solo agli insegnanti di scuole secondarie, ma anche a tutte le persone dell'ambiente scientifico tecnico che desiderano ottenere, ad un livello elementare ma in una forma rigorosamente corretta, notizie sugli aspetti più recenti della evoluzione della didattica matematica nelle nostre scuole medie superiori, dalle quali si possono ricavare indirettamente notizie sulla evoluzione della matematica in generale, almeno fin dove lo consente il livello tecnico a cui queste esposizioni sono necessariamente limitate.

Dopo queste considerazioni generali veniamo ad un rapido esame dei particolari trattati nei vari articoli.

L'opera è divisa in quattro parti:

a) La prima è dedicata ai concetti fondamentali dell'algebra e a cenni sulle prime nozioni di topologia. Essa consta di quattro articoli di cui il primo è dovuto al compianto collega M. Baldassarri, e riguarda le *nozioni generali dell'algebra astratta.* Dopo aver toccato rapidamente la teoria degli insiemi, illustra le nozioni di *relazione*, di *mappa* e di *relazione d'ordine*, passa a parlare di *operazioni* e *strutture*, fino ad arrivare alla costruzione dei numeri *naturali*, *interi* o *razionali*.

Il secondo articolo, di U. Morin, è dedicato alle *strutture algebriche fondamentali* e sviluppa quindi uno dei concetti accennati nel precedente articolo, soffermandosi ad illustrare gli elementi della teoria dei *gruppi*, degli *anelli,* dei *corpi* e degli *spazi vettoriali,* e dando anche un cenno sull'*algebra di Boole.*

Il terzo articolo, di M. Villa, riguarda i *gruppi di trasformazioni elementari,* ed il quarto, dovuto a T. Viola, contiene nozioni elementari di *topologia degli spazi euclidei.*

b) La seconda parte tratta dei fondamenti della matematica e in particolare della geometria ed è divisa anch'essa in quattro articoli. Nel primo di essi T. Viola espone le prime nozioni di *logica matematica,* il secondo è dedicato da L. Campedelli alla *struttura logica della geometria,* il terzo, di M. Villa, illustra le questioni relative al *quinto postulato di Euclide.* Nel quarto articolo infine U. Morin espone una *costruzione* della *geometria elementare* in cui partendo dalle nozioni di incidenza e di parallelismo si sviluppano vari argomenti classici fino alle prime nozioni sullo spazio euclideo.

c) La terza parte contiene notizie sulla trigonometria e sulle serie di Fourier. È diviso in due articoli di cui il primo dovuto a P. Buzano è una succinta costruzione della *trigonometria elementare,* mentre nel secondo G. Ricci espone la teoria delle *serie di Fourier* e della *trasformata* omonima, sfruttando soltanto le nozioni di analisi che si possono presupporre note ad uno studente di liceo scientifico.

d) La quarta parte infine illustra in quattro articoli alcuni degli aspetti più tipicamente applicativi della matematica moderna.

Nel primo articolo G. Ricci fornisce notizie sulla *programmazione lineare,* giungendo fino a dare uno schizzo del *metodo del simplesso.* Il secondo è dedicato da G. Evangelisti al *calcolo automatico,* di cui sono illustrate le principali caratteristiche e ai *calcolatori elettronici,* di cui vengono schizzati i principi di funzionametno. Il terzo articolo, di L. Daboni, è dedicato al *calcolo delle probabilità,* di cui sono illustrati i principi fondamentali fino alla nozione di variabile aleatoria in un quadro più generale di quello in cui solitamente vengono inquadrate le notizie elementari, oggetto di insegnamento nelle scuole secondarie, limitate per lo più allo schema bernoulliano. I rapporti fra frequenza e probabilità vi sono studiati alla luce del teorema di Bayes. Il quarto articolo, dovuto ancora ad L. Daboni, riguarda alcune questioni di *matematica finanziaria,* che costituiscono un utile complemento degli argomenti che sono solitamente oggetto di insegnamento nelle scuole secondarie.

MARCO CUGIANI