BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LAMBERTO CATTABRIGA

Sulla connessione di un teorema di tracce con un certo poliedro convesso.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **22** (1967), n.1, p. 45–56.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1967_3_22_1_45_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1967.

Sulla connessione di un teorema di tracce con un certo poliedro convesso.

LAMBERTO CATTABRIGA (Ferrara) (*)

Sunto. - *Si individua una relazione fra un teorema di tracce per un certo spazio funzionale ed un poliedro convesso mediante il quale è definito tale spazio.*

1. È noto (¹) che una funzione positiva $\mu(\xi)$ continua sullo spazio euclideo ν-dimensionale E^ν si dice una *funzione peso temperata* se esistono due costanti positive C e d tali che

$$\mu(\xi+\eta) \leq C(1+|\xi|)^d \mu(\eta) \quad \forall\ \xi,\ \eta \in E^\nu,$$

ove $|\xi|^2 = \sum_1^\nu {}_j\ \xi_j^2$.

Sia $\mathcal{S}(E^\nu)$ lo spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili su E^ν ed ivi a decresenza rapida ed $\mathcal{S}'(E^\nu)$ il suo duale. Con $\tilde{u}$ indichiamo la trasformata di FOURIER di $u \in \mathcal{S}'(E^\nu)$ definita nel modo noto dopo aver posto per ogni $u \in \mathcal{S}(E^\nu)$

$$\tilde{u}(\xi) = \int e^{-i<x,\,\xi>} u(x)dx, \quad x,\ \xi \in E^\nu,$$

ove $<x,\ \xi> = \sum_1^\nu {}_j\ x_j\,\xi_j$.

Se $\mu(\xi)$ è una funzione peso temperata su E^ν, con $H_\mu(E^\nu)$ indichiamo lo spazio lineare delle $u \in \mathcal{S}'(E^\nu)$ tali che $\tilde{u}$ è una funzione e

$$\|u\|_{H_\mu(E^\nu)} = \left((2\pi)^{-\nu}\int_{E^\nu} \mu^2(\xi)\,|\tilde{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} < \infty. \tag{1.1}$$

È stato provato (²) che $H_\mu(E^\nu)$ *è uno spazio hilbertiano con la norma definita da* (1.1) *ed è*

$$\mathcal{S}(E^\nu) \subset H_\mu(E^\nu) \subset \mathcal{S}'(E^\nu)$$

anche in senso topologico ed $\mathcal{S}(E^\nu)$ *è denso in* $H_\mu(E^\nu)$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(¹) Si veda [3] Cap. II e [8] Cap. I.

(²) l.c. in (¹).

Nello spazio euclideo n-dimensionale S^n, $n \geq 2$, siano dati i punti $r^i = (r_1^i, \ldots, r_n^i)$, $i = 1, \ldots, M$, tali che

a) $\quad r^i \in S_n^+ = \{ s \in S_n ; \; s_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n \}, \; i = 1, \ldots, M;$

b) *per ogni* $j = 1, \ldots, n$ *esiste almeno un* i, *sia* i_j, *tale che* $r_j^{i_j} > 0$.

Sia

$$\rho(\xi) = \left(\sum_{1}^{M}{}_i \prod_{1}^{n}{}_j \, (1 + \xi_j^2)^{r_j^i} \right)^{1/2}, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E^n. \tag{1.2}$$

In [1](3) abbiamo provato che $\rho(\xi)$ *è una funzione peso temperata su* E^n.

Sui punti assegnati r^i facciamo inoltre l'ipotesi

c) $\quad \max\limits_{1 \leq i \leq M} r_n^i = m_n > 1/2,$

e indichiamo con $\{ m_n - 1/2 \}$ il più grande intero inferiore ad $m_n - 1/2$.

Per $h \in [0, m_n - 1/2[$ sia

$$\rho_h(\xi') = (2\pi)^{1/2} \left(\int_E t^{2h} \rho^{-2}(\xi', t) dt \right)^{-1/2}, \quad \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in E^{n-1}. \tag{1.3}$$

Le funzioni $\rho_h(\xi')$ sono funzioni peso temperate su E^{n-1}.

Posto $X = \{ x \in E^n ; \; x_n = 0 \}$, con $\gamma_h u$, $h = 0, \ldots, \{ m_n - 1/2 \}$, indichiamo la restrizione ad X di $\partial^h u / \partial x_n^h$, $u \in \mathcal{S}(E^n)$. In [1] (4) abbiamo provato il

TEOREMA. - *Nelle ipotesi* a), b), c) *l'applicazione* $u \to (\gamma_0 u, \ldots, \gamma_{\{m_n - 1/2\}} u)$, $u \in \mathcal{S}(E^n)$, *si prolunga in una applicazione lineare e continua di* $H_\rho(E^n)$ *su* $H_{\rho_0}(X) \times \ldots \times H_{\rho_{\{m_n - 1/2\}}}(X)$, *con* $\rho(\xi)$ *e* $\rho_h(\xi')$, $h = 0, \ldots, \{ m_n - 1/2 \}$, *definite dalle* (1.2) *e* (1.3).

Vogliamo precisare qui la relazione in cui stanno le funzioni $\rho_h(\xi')$, $h \in [0, m_n - 1/2[$ definite da (1.3) con il poliedro $\mathfrak{R}$, inviluppo convesso in S^n dei vertici dei parallelepipedi $Q(r^i) = \{ s \in S^n ; \; 0 \leq s_j \leq r_j^i, \; j = 1, \ldots, n \}$, $i = 1, \ldots, M$. Premettiamo a questo scopo alcuni lemmi su una famiglia di poliedri convessi. Il teorema del n. 3 fornisce la relazione indicata.

(3) Si veda il lemma 2.3. Lo spazio $H_\rho(E^n)$ è caso particolare di uno spazio introdotto in [4].

(4) Si veda il teorema 4.3. Casi particolari di questo teorema si trovano in [5], [6], [7].

2. Sia $\mathfrak{F}^\nu$ la famiglia dei poliedri convessi $\mathfrak{P}$ ([5]) dello spazio euclideo ν-dimensionale S^ν, $\nu \geq 1$, tali che

1) $\mathfrak{P} \subset S^\nu_+ = \{ s \in S^\nu;\ s_j \geq 0,\ j = 1, \dots, \nu \}$;

2) $\mathfrak{P} \supset Q(r) = \{ s \in S^\nu;\ 0 \leq s_j \leq r_j,\ j = 1, \dots, \nu \}$, $\forall\, r \in \mathfrak{P}$;

3) $\mathfrak{P}$ ha dimensione ν ([6]).

Siano $s^1, \dots, s^{N(\mathfrak{P})}$ i vertici di $\mathfrak{P}$. È noto che essi sono tutti e soli i punti estremi di $\mathfrak{P}$ ([7]) e che $\mathfrak{P}$ coincide con il loro inviluppo convesso, ossia con l'insieme degli $s \in S^\nu$ tali che

$$s = \sum_{l=1}^{N(\mathfrak{P})} \lambda_l s^l, \qquad \lambda_l \geq 0, \qquad \sum_{l=1}^{N(\mathfrak{P})} \lambda_l = 1 \ ([8]).$$

Per ogni $\mathfrak{P} \in \mathfrak{F}^\nu$ definiamo nello spazio euclideo ν-dimensionale E^ν la funzione

$$P(\xi) = \left(\sum_{l=1}^{N(\mathfrak{P})} |\xi^{2s^l}| \right)^{1/2}, \qquad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_\nu) \in E^\nu, \tag{2.1}$$

ove $\xi^{2s^l} = \prod_{j=1}^{\nu} \xi_j^{2s_j^l}$.

Lemma 2.1. - *Se $\mathfrak{P} \in \mathfrak{F}^\nu$ allora*

i) l'origine $\mathbf{O}$ di S^ν è vertice di $\mathfrak{P}$.

ii) per ogni $k = 1, \dots, \nu$ esiste un vertice s^{l_k} tale che $s^{l_k} = s_k e^k$ ([9]) *ed è $s^{l_k}_k = \max_{s \in \mathfrak{P}} s_k = m_k > 0$;*

iii) $\mathfrak{P}$ è intersezione di S^ν_+ e di semispazi chiusi, in numero finito la cui frontiera è un iperpiano avente normale, diretta versò quello dei due semispazi in cui esso divide S^ν che non contiene $\mathfrak{P}$, con coseni direttori tutti non negativi; ([10])

$$iv) \qquad \mathfrak{P} = \{ s \in S^\nu_+;\ \prod_{j=1}^{\nu} (\xi_j^2)^{s_j} \leq P^2(\xi),\ \forall\, \xi \in E^\nu \}.$$

([5]) Per poliedro convesso di S^ν si intende come è noto l'inviluppo convesso di un insieme finito F di S^ν, ossia l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono F. $\mathfrak{P}$ è limitato e chiuso poichè tale è F.

([6]) Cioè a $\mathfrak{P}$ appartengono $\nu + 1$ punti $r^0, \dots, r^\nu$, tali che $r^1 - r^0, \dots, r^\nu - r^0$ sono linearmente indipendenti.

([7]) $s \in \mathfrak{P}$ è un punto estremo di $\mathfrak{P}$ se non esistono due punti r^1, r^2, $r^1 \neq r^2$, di $\mathfrak{P}$ tali che $s = \lambda r^1 + (1 - \lambda) r^2$, $\lambda \in \,]0, 1[$.

([8]) Si veda per es. [2], teoremi 13 e 14.

([9]) $e^k \in S^\nu_+$, $e^k_j = \delta_{jk}$, $k, j = 1, \dots, \nu$ (δ_{jk} simbolo di Kronecker).

([10]) Questa proposizione perde senso per $\nu = 1$. Per $\nu = 2$ e $\nu = 3$ "iperpiano" sta qui e nel seguito per "retta" e "piano" rispettivamente

Dimostrazione. - La $i)$ è immediata. Infatti qualunque siano $\boldsymbol{r}^1, \boldsymbol{r}^2 \in \mathfrak{P}$, $\boldsymbol{r}^1 \neq \boldsymbol{r}^2$, è sempre $\lambda\boldsymbol{r}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{r}^2 \neq 0$ per ogni $\lambda \in]0, 1[$. Anche $ii)$ si prova subito osservando che se $\boldsymbol{s} \in \mathfrak{P}$ è pure $s_k\boldsymbol{e}^k \in \mathfrak{P}$ e quindi per la chiusura di $\mathfrak{P}$ anche $m_k\boldsymbol{e}^k = (\max\limits_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{P}} s_k)\boldsymbol{e}^k \in \mathfrak{P}$ per ogni $k = 1, \ldots, \nu$. Tutti questi punti sono punti estremi e quindi vertici di $\mathfrak{P}$. Infatti se $\boldsymbol{r}^1, \boldsymbol{r}^2 \in \mathfrak{P}$ è $\lambda r_k^1 + (1-\lambda)r_k^2 = m_k$ per un $\lambda \in]0, 1[$ se e soltanto se $r_k^1 = r_k^2 = m_k$ e $\lambda r_j^1 + (1-\lambda)r_j^2 = 0$ per ogni $j \neq k$ e per un $\lambda \in]0, 1[$ se e soltanto se $r_j^1 = r_j^2 = 0$ per $j \neq k$. Dunque è $m_k\boldsymbol{e}^k = \lambda\boldsymbol{r}^1 + (1-\lambda)\boldsymbol{r}^2$ per un $\lambda \in]0, 1[$ se e soltanto se $\boldsymbol{r}^1 = \boldsymbol{r}^2 = m_k\boldsymbol{e}^k$. Dalla 3) segue poi che deve essere $m_k > 0$ per ogni $k = 1, \ldots, \nu$.

Per provare $iii)$ osserviamo che $\mathfrak{P}$ è intersezione di un numero finito di semispazi chiusi che hanno per frontiera un suo iperpiano di supporto ([11]). Nel nostro caso se uno di tali iperpiani passa per l'origine $\boldsymbol{O}$ di S^ν, il semispazio chiuso che ha tale iperpiano come frontiera e contiene $\mathfrak{P}$ conterrà pure tutto S_+^ν. Pertanto $\mathfrak{P}$ è intersezione di S_+^ν e di numero finito di semispazi chiusi aventi per frontiera un iperpiano di supporto non passante per $\boldsymbol{O}$. Sia π uno di tali iperpiani, $\sum_j\limits_1^\nu a_j s_j = 1$ la sua equazione e σ il semispazio chiuso contenente $\mathfrak{P}$ ed avente π per frontiera. È

$$\sum_{j=1}^{\nu} a_j s_j \leq 1, \qquad \forall\, \boldsymbol{s} \in \mathfrak{P}.$$

Gli a_j non possono essere tutti negativi poichè π passa per punti di $\mathfrak{P}$. Siano $a_{j_1}, \ldots, a_{j_h}$ quelli fra essi che sono negativi. Per ogni $\boldsymbol{s} \in S^\nu$ indichiamo con $\boldsymbol{s}^*$ il punto di coordinate $s_j^* = s_j$ per $j \neq j_1, \ldots, j_h$ e $s_{j_1}^* = \ldots = s_{j_h}^* = 0$. Se π passa per un $\boldsymbol{s} \in \mathfrak{P}$ allora deve essere $s_{j_1} = \ldots = s_{j_h} = 0$, altrimenti per il punto $\boldsymbol{s}^*$, che appartiene a $\mathfrak{P}$ per la proprietà 2), sarebbe

$$\sum_{j=1}^{\nu} a_j s_j^* > \sum_{j=1}^{\nu} a_j s_j = 1.$$

Per i punti in cui π interseca $\mathfrak{P}$ passa anche l'iperpiano π' di

([11]) Si veda per es. [2], teorema 16. Iperpiano di supporto a $\mathfrak{P}$ è ogni iperpiano che intersechi $\mathfrak{P}$ e tale che uno solo dei due semispazi aperti in cui l'iperpiano divide S^ν contenga punti di $\mathfrak{P}$.

equazione $\sum_{j\neq j_1,\dots,j_h}^{\nu} {}_1\, a_j s_j = 1$, inoltre per ogni $s \in \mathbb{P}$ è

$$\sum_{1,\, j\neq j_1,\dots,j_h}^{\nu} a_j s_j = \sum_{1,\, j}^{\nu} a_j s_j^* \leq 1,$$

poichè $s^* \in \mathbb{P}$. È dunque $\mathbb{P} \subset \sigma' = \{ s \in S^\nu;\ \sum_{1,\, j\neq j_1,\dots,j_h}^{\nu} a_j s_j \leq 1 \}$ e π' è iperpiano di supporto a $\mathbb{P}$. Inoltre è $\sigma' \cap S_+^\nu \subset \sigma \cap S_+^\nu$. $\mathbb{P}$ è perciò intersezione di S_+^ν e di semispazi chiusi, in numero finito, aventi per frontiera iperpiani di supporto a $\mathbb{P}$ di equazione $\sum_{1,\, j}^{\nu} a_j s_j = 1$ con gli a_j tutti non negativi.

Infine se $s \in \mathbb{P}$ è

$$s = \sum_{1,\, l}^{N(\mathbb{P})} \lambda_l s^l, \qquad \lambda_l \geq 0, \qquad \sum_{1,\, l}^{N(\mathbb{P})} \lambda_l = 1,$$

e quindi

$$\prod_{1,\, j}^{\nu} (\xi_j^2)^{s_j} = \prod_{1,\, l}^{N(\mathbb{P})} \left(\prod_{1,\, j}^{\nu} (\xi_j^2)^{s_j^l} \right)^{\lambda_l} \leq \sum_{1,\, l}^{N(\mathbb{P})} \lambda_l \prod_{1,\, j}^{\nu} (\xi_j^2)^{s_j^l} \leq P^2(\xi). \qquad \forall\, \xi \in E^\nu.$$

Se poi $r \in S_+^\nu$ ma $r \notin \mathbb{P}$ allora r non appartiene ad almeno uno dei semispazi indicati in *iii*), onde per un $\lambda \in]0, 1[$ λr starà sull'iperpiano frontiera di tale semispazio. Sia $\sum_{1,\, j}^{\nu} a_j s_j = 1$ l'equazione di tale iperpiano. Per *iii*) è $a_j \geq 0$, $j = 1, \dots, \nu$. Per $\xi_j = t^{a_j/2}$, $t > 1$, $j = 1, \dots, \nu$, è

$$\prod_{1,\, j}^{\nu} (\xi_j^2)^{r_j} = t^{1/\lambda}$$

e per ogni $l = 1, \dots, N(\mathbb{P})$, riuscendo sempre $\sum_{1,\, j}^{\nu} a_j s_j^l \leq 1$,

$$\prod_{1,\, j}^{\nu} (\xi_j^2)^{s_j^l} = t^{\sum_{1,\, j}^{\nu} a_j s_j^l} \leq t.$$

Da queste maggiorazioni segue che la funzione $P^{-2}(\xi) \prod_{1,\, j}^{\nu} (\xi_j^2)^{r_j}$ non può restare limitata in E^ν.

Sia $n \geq 2$, $s' = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in S^{n-1}$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in E^{n-1}$, $\mathbb{P} \in \mathcal{S}^n$, $\mathbb{P}_\alpha = \{ s' \in S^{n-1};\ (s', \alpha) \in \mathbb{P} \}$, $\alpha \in [0, m_n[$.

LEMMA 2.2. - *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{S}^n$, $n \geq 2$, *allora*

i) $\mathbb{P}_\alpha \in \mathcal{S}^{n-1}$, $\forall\, \alpha \in [0, m_n[$;

ii) $P_\alpha(\xi')\,|\,\xi_n\,|^\alpha \leq C_1 P(\xi)$ [12], $\forall\, \xi = (\xi', \xi_n) \in E^n$;

iii) $P_\beta(\xi') \leq C_1 P_\alpha(\xi')$, $\qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1}$, $\alpha, \beta \in [0, m_n[$. $\alpha < \beta$,

con $C_1^2 = \sup\limits_{\alpha \in [0, m_n[} N(\mathbb{P}_\alpha)$.

DIMOSTRAZIONE. - $\mathbb{P}_\alpha$ è un poliedro convesso di S^{n-1} poichè è intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di S^{n-1}. Inoltre se $\boldsymbol{r}' \in \mathbb{P}_\alpha$ è $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}', \alpha) \in \mathbb{P}$ e quindi $Q(\boldsymbol{r}) \subset \mathbb{P}$, da cui segue $Q(\boldsymbol{r}') \subset \mathbb{P}_\alpha$. Per il lemma 2.1 *ii)* appartengono a $\mathbb{P}$ tutti i punti

$$\boldsymbol{s} = \sum_{1}^{n}{}_k\, \lambda_k m_k \boldsymbol{e}^k, \qquad \lambda_k \geq 0, \qquad \sum_{1}^{n}{}_k\, \lambda_k \leq 1$$

e quindi a $\mathbb{P}_\alpha$ i punti

$$\boldsymbol{s}' = \sum_{1}^{n-1}{}_k\, \lambda_k m_k \boldsymbol{e}^k, \qquad \lambda_k \geq 0, \qquad \sum_{1}^{n-1}{}_k\, \lambda_k \leq 1 - \alpha/m_n.$$

A $\mathbb{P}_\alpha$ appartengono perciò, oltre all'origine $\boldsymbol{O}$ di S^{n-1}, anche i punti $m_k(1 - \alpha/m_n)\boldsymbol{e}^k$ $k = 1, \ldots, n-1$. Ciò prova *i)*. La *ii)* si ottiene applicando il lemma 2.1 *iv)* ai punti $(\boldsymbol{s}', \alpha) \in \mathbb{P}$ tali che $\boldsymbol{s}'$ sia vertice di $\mathbb{P}_\alpha$. Per provare la *iii)* basta osservare che, come conseguenza della 2), è $\mathbb{P}_\beta \subset \mathbb{P}_\alpha$ ed applicare il lemma 2.1 *iv)* ai vertici di $\mathbb{P}_\beta$.

Siano $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{k_n} = m_k$ i valori assunti da s_n^l, $l = 1, \ldots, N(\mathbb{P})$.

LEMMA 2.3. - *Se* $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^n$, $n \geq 2$, $\beta, \gamma \in [0, m_n[$. $\beta < \gamma$ *è*

i) $P_\alpha(\xi') \geq C_1^{-2}[P_\beta(\xi')]^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}[P_\gamma(\xi')]^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}}$, $\forall\, \xi' \in E^{n-1}$, *se* $\alpha \in [\beta, \gamma]$;

ii) $P_\alpha(\xi') \leq C_1^{\frac{2m_n}{\gamma-\beta}}[P_\beta(\xi')]^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}[P_\gamma(\xi')]^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}}$, $\forall\, \xi' \in E^{n-1}$, *se* $\alpha \notin\,]\beta, \gamma[$;

iii) $P_\alpha(\xi') \leq C_1[P_\beta(\xi')]^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}[P_\gamma(\xi')]^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}}$, $\forall\, \xi' \in E^{n-1}$, *se* $\alpha \in [\beta, \gamma]$ *e* $\alpha_k \notin\,]\beta, \gamma[$ *per ogni* $k = 0, \ldots, k_n$.

DIMOSTRAZIONE. - Indichiamo con $\boldsymbol{b}'^i = (b_1^i, \ldots, b_{n-1}^i) \in S_+^{n-1}$, $i = 1, \ldots, N(\mathbb{P}_\beta)$, e $\boldsymbol{c}'^h = (c_1^h, \ldots, c_{n-1}^h) \in S_+^{n-1}$, $h = 1, \ldots, N(\mathbb{P}_\gamma)$ i vertici di $\mathbb{P}_\beta$ e $\mathbb{P}_\gamma$ rispettivamente. Posto $\boldsymbol{b}^i = (\boldsymbol{b}'^i, \beta)$ e $\boldsymbol{c}^h = (\boldsymbol{c}'^h, \gamma)$ tutti i punti $\boldsymbol{s} = \lambda \boldsymbol{b}^i + (1-\lambda)\boldsymbol{c}^h$ appartengono a $\mathbb{P}$ e quindi appartengono

[12] $P_\alpha(\xi')$ è la funzione definita secondo la (2 1) in corrispondenza al poliedro $\mathbb{P}_\alpha$, $\alpha \in [0, m_n[$.

a $\mathbb{P}_\alpha$ i punti

$$s' = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} b'^i + \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} c'^h.$$

Dal lemma 2.1 *iv*) segue allora che per tali punti s' è

$$P_\alpha^2(\xi') \geq \prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{s_j} = \left(\prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{b_j^i}\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}} \left(\prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{c_j^h}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}}, \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1}.$$

Sommando rispetto ad i e h si ottiene per ogni $\xi' \in E^{n-1}$

$$P_\alpha^2(\xi') N(\mathbb{P}_\beta) N(\mathbb{P}_\gamma) \geq \sum_1^{N(\mathbb{P}_\beta)}{}_i \left(\prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{b_j^i}\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}} \cdot \sum_1^{N(\mathbb{P}_\gamma)}{}_h \left(\prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{c_j^h}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}} \geq$$

$$\geq \left(\sum_1^{N(\mathbb{P}_\beta)}{}_i \prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{b_j^i}\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}} \cdot \left(\sum_1^{N(\mathbb{P}_\gamma)}{}_h \prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{c_j^h}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}},$$

da cui segue la *i*). La *ii*) è una conseguenza di *i*). Infatti se per es. è $\alpha < \beta < \gamma$ per la *i*) si ha

$$C_1^2 P_\beta(\xi') \geq [P_\alpha(\xi')]^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} [P_\gamma(\xi')]^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1}$$

e quindi

$$P_\alpha(\xi') \leq C_1^{2\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}} [P_\beta(\xi')]^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}} [P_\gamma(\xi')]^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\alpha} \cdot \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}, \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1}.$$

Infine se $\alpha \in]\beta, \gamma[$ ed $\alpha_k \notin]\beta, \gamma[$, $k = 0, \ldots, k_n$, consideriamo il poliedro convesso $\mathbb{P}(\beta, \gamma) = \{ s \in \mathbb{P};\ \beta \leq s_n \leq \gamma \}$. I punti $b^i = (b'^i, \beta)$, $i = 1, \ldots, N(\mathbb{P}_\beta)$, e $c^h = (c'^h, \gamma)$, $h = 1, \ldots, N(\mathbb{P}_\gamma)$, considerati più sopra sono i vertici di $\mathbb{P}(\beta, \gamma)$. Pertanto se $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in S^{n-1}$ è un vertice di $\mathbb{P}_\alpha$ ed $a = (a', \alpha)$ si ha

$$a = \sum_1^{N(\mathbb{P}_\beta)}{}_i \lambda_i b^i + \sum_1^{N(\mathbb{P}_\gamma)}{}_h \mu_h c^h, \qquad \lambda_i \geq 0, \qquad \mu_h \geq 0,$$

con $\displaystyle\sum_1^{N(\mathbb{P}_\beta)}{}_i \lambda_i = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}$ e $\displaystyle\sum_1^{N(\mathbb{P}_\gamma)}{}_h \mu_h = \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}$

Pertanto

$$\prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{a_j} = \prod_1^{N(\mathbb{P}_\beta)}{}_i \left(\prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{b_j^i}\right)^{\lambda_i} \prod_1^{N(\mathbb{P}_\gamma)}{}_h \left(\prod_1^{n-1}{}_j (\xi_j^2)^{c_j^h}\right)^{\mu_h} \leq [P_\beta^2(\xi')]^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}} [P_\gamma^2(\xi')]^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}}$$

per ogni $\xi' \in E^{n-1}$. Sommando le maggiorazioni che così si ottengono per tutti i vertici $\boldsymbol{a}'$ di $\mathbb{P}_\alpha$ si giunge alla *iii*).

3. Consideriamo ora il poliedro $\mathbb{R}$, introdotto alla fine del n. 1, inviluppo convesso dei vertici dei parallelepipedi $Q(\boldsymbol{r}^i)$; i punti $\boldsymbol{r}^i$, $i = 1, \dots, M$, soddisfacendo alle a), b), c) del *n.* 1. Siano $\boldsymbol{s}^l$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{R})$, i vertici di $\mathbb{R}$. Ciascuno di essi coincide con un vertice di uno dei parallelepipedi $Q(\boldsymbol{r}^i)$, $i = 1, \dots, M$.

LEMMA 3.1. - $\mathbb{R} \in \mathcal{S}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}$ è

$$\boldsymbol{s} = \sum_{1}^{N(\mathbb{R})}{}_l\, \lambda_l \boldsymbol{s}^l, \qquad \lambda_l \geq 0, \qquad \sum_{1}^{N(\mathbb{R})}{}_l\, \lambda_l = 1,$$

onde $\boldsymbol{s} \in S^n_+$. Inoltre se $\boldsymbol{t} \in Q(\boldsymbol{s})$

$$\boldsymbol{t} = \sum_{1}^{N(\mathbb{R})}{}_l\, \lambda_l \boldsymbol{z}^l, \qquad \lambda_l \geq 0, \qquad \sum_{1}^{N(\mathbb{R})}{}_l\, \lambda_l = 1,$$

con $\boldsymbol{z}^l = (\tau_1 s^l_1, \dots, \tau_n s^l_n)$, $\tau_j = t_j/s_j$ se $s_j \neq 0$ e $\tau_j = 1$ se $s_j = 0$. È $\boldsymbol{z}^l \in Q(\boldsymbol{s}^l) \subset \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, N(\mathbb{R})$, e quindi pure $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$. Da ciò segue che $(\max\limits_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}} s_j) \boldsymbol{e}^j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, e quindi, poichè $\max\limits_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}} s_j = \max\limits_{1 \leq i \leq M} r^i_j > 0$, che $\mathbb{R}$ è n-dimensionale.

In [1] [13] abbiamo provato che esistono due costanti positive C_2, C_3 tali che per ogni $\xi \in E^n$

$$C_2 \rho(\xi) \leq R(\xi) \leq C_3 \rho(\xi). \tag{3 1}$$

Anche $R(\xi)$, come $\rho(\xi)$, è dunque una funzione peso temperata su E^n e gli spazi $H_\rho(E^n)$ ed $H_R(E^n)$ coincidono, le relative norme riuscendo equivalenti.

Poniamo ora

$$R^*(\xi) = \left(\sum_{0}^{k_n}{}_k\, R^2_{\alpha_k}(\xi')(\xi_n^2)^{\alpha_k} \right)^{1/2} \ [14], \qquad \xi = (\xi', \xi_n) \in E^n,$$

ove $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{k_n} = m_n$ sono i valori assunti da s^l_n in $\mathbb{R}$.

[13] Si vede il lemma 2.2. $R(\xi)$ è la funzione definita da (2 1) in corrispondenza al poliedro $\mathbb{R}$.

[14] Si è posto qui $R_{\alpha_{k_n}}(\xi') = 1$ per ogni $\xi' \in E^{n-1}$.

LEMMA 3.2. - *Per ogni* $\xi \in E^n$ *è*

$$R(\xi) \leq R^*(\xi) \leq C_4 R(\xi).$$

con C_4 *costante positiva.*

DIMOSTRAZIONE. - Il lemma è immediata conseguenza del lemma 2.2 *ii*) e del fatto che ogni termine che figura nella somma che esprime $R^2(\xi)$ si trova anche nella espressione di $R^{*2}(\xi)$.

TEOREMA. - *Siano verificate le ipotesi a), b), c) del n. 1. Sia* $\mathfrak{R}$ *l'inviluppo convesso dei vertici dei parallelepipedi* $Q(\mathbf{r}^i)$, $i = 1, \dots, M$, *e* $0 = \alpha_0 < \dots < \alpha_{k_n} = m_n$ *i valori assunti dagli* r_n^i, $i = 1, \dots, M$. *Per* $h \in [0, m_n - 1/2[$, *posto* $\alpha_\varkappa = \max\{r_n^i, \ i = 1, \dots, M; \ r_n^i < h + 1/2\}$ *è*

$$C' R_{h+1/2}(\xi') \leq \rho_h(\xi') \leq C'' R_{h+1/2}(\xi'), \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1},$$

se $\alpha_{\varkappa+1} > h + 1/2$, *mentre se* $\alpha_{\varkappa+1} = h + 1/2$ *è*

$$C'''(\gamma)[R_{\alpha_\varkappa}(\xi')]^{\frac{\gamma - h - 1/2}{\gamma - \alpha_\varkappa}} [R_\gamma(\xi')]^{\frac{h+1/2-\alpha_\varkappa}{\gamma - \alpha_\varkappa}} \leq \rho_h(\xi') \leq C'' R_{h+1/2}(\xi'), \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1}$$

qualunque sia $\gamma \in]h + 1/2, m_n[$ *ed anche* ([15])

$$R_{h+1/2}(\xi')\left[C^{IV} + \frac{1}{\alpha_{\varkappa+2} - h - 1/2}\log\frac{R_{h+1/2}(\xi')}{R_{\alpha_{\varkappa+2}}(\xi')} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{h + 1/2 - \alpha_\varkappa}\log\frac{R_{\alpha_\varkappa}(\xi')}{R_{h+1/2}(\xi')}\right]^{-1/2} \leq \rho_h(\xi'), \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1}$$

ove C', C'', $C'''(\gamma)$, C^{IV} *sono costanti positive che dipendono soltanto da* h *e* $C'''(\gamma)$ *anche da* γ.

DIMOSTRAZIONE. - Per la (3.1) ed il lemma 3.2 basterà valutare la funzione

$$I(\xi') = \int_0^{+\infty} t^{2h} R^{*-2}(\xi', t)\,dt, \qquad \xi' \in E^{n-1},$$

che con il cambiamento di variabile

$$t = [R_{\alpha_\varkappa}(\xi') / R_{\alpha_{\varkappa+1}}(\xi')]^{1/(\alpha_{\varkappa+1} - \alpha_\varkappa)}\tau$$

([15]) Questa maggiorazione mi è stata indicata da E. DE GIORGI.

diviene

$$I(\xi') = \left(\frac{R_{\alpha_\varkappa}(\xi')}{R_{\alpha_{\varkappa+1}}(\xi')}\right)^{(2h+1)/(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)} \int_0^{+\infty} \tau^{2h} \,\cdot$$

$$\cdot \left[\sum_0^{k_n}{}_k R^2_{\alpha_k}(\xi')\left(\frac{R^2_{\alpha_\varkappa}(\xi')}{R^2_{\alpha_{\varkappa+1}}(\xi')}\right)^{\alpha_k/(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)} \tau^{2\alpha_k}\right]^{-1} d\tau .$$

Per il lemma 2.3 *ii*) con $\beta = \alpha_\varkappa$ e $\gamma = \alpha_{\varkappa+1}$ ciascuna delle funzioni

$$R_{\alpha_k}(\xi')[R_{\alpha_\varkappa}(\xi')/R_{\alpha_{\varkappa+1}}(\xi')]^{\alpha_k/(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)}, \quad k = 0, \ldots, k_n, \quad \xi' \in E^{n-1}$$

è maggiorata in E^{n-1}, a meno di un fattore costante, dalla

$$[R_{\alpha_\varkappa}(\xi')]^{\alpha_{\varkappa+1}/(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)}[R_{\alpha_{\varkappa+1}}(\xi')]^{-\alpha_\varkappa/(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)}.$$

Pertanto in E^{n-1} $I(\xi')$ maggiora a meno di un fattore costante la funzione

$$[R_{\alpha_\varkappa}(\xi')]^{-\frac{2\alpha_{\varkappa+1}-2h-1}{\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa}}[R_{\alpha_{\varkappa+1}}(\xi')]^{-\frac{2h+1-2\alpha_\varkappa}{\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa}} \int_0^{+\infty} \tau^{2h}\left[\sum_0^{k_n}{}_k \tau^{2\alpha_k}\right]^{-1} d\tau$$

e quindi per il lemma 2.3 *i*) la $R^{-2}_{h+1/2}(\xi')$. È così provato che

$$\rho_h(\xi') \leq C'' R_{h+1/2}(\xi'), \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1},$$

con C'' costante positiva.

È poi

$$\sum_0^{k_n}{}_k R^2_{\alpha_k}(\xi')[R^2_{\alpha_\varkappa}(\xi')/R^2_{\alpha_{\varkappa+1}}(\xi')]^{\alpha_k/(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)}\tau^{2\alpha_k} >$$

$$> [R^2_{\alpha_\varkappa}(\xi')]^{\alpha_{\varkappa+1}/(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)}[R^2_{\alpha_{\varkappa+1}}(\xi')]^{-\alpha_\varkappa/(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)}\tau^{2\alpha_\varkappa}(1 + \tau^{2(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)})$$

onde, se $\alpha_{\varkappa+1} > h + 1/2$, per ogni $\xi' \in E^{n-1}$

$$I(\xi') < [R_{\alpha_\varkappa}(\xi')]^{-\frac{2\alpha_{\varkappa+1}-2h-1}{\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa}}[R_{\alpha_{\varkappa+1}}(\xi')]^{-\frac{2h+1-2\alpha_\varkappa}{\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa}} \int_0^{+\infty} \tau^{2(h-\alpha_\varkappa)}(1+\tau^{2(\alpha_{\varkappa+1}-\alpha_\varkappa)})^{-1} d\tau.$$

Da questa per il lemma 2.3 *iii*) segue che

$$\rho_h(\xi') \geq C' R_{h+1/2}(\xi'), \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1},$$

con C' costante positiva. Osserviamo che la condizione $\alpha_{\varkappa+1} > h + 1/2$ è certamente verificata quando h e gli r_n^i, $i = 1, \ldots, M$, sono tutti interi.

Se $\alpha_{\varkappa+1} = h + 1/2$, sia $\gamma \in]h + 1/2, m_n[$. Come conseguenza del lemma 2.2 *ii*) e del lemma 3.2 è

$$\int_0^{+\infty} t^{2h}[R^2_{\alpha_\varkappa}(\xi')t^{2\alpha_\varkappa} + R^2_\gamma(\xi')t^{2\gamma}]^{-1}dt \geq CI(\xi'), \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1},$$

con C costante positiva. Ponendo

$$t = [R_{\alpha_\varkappa}(\xi')/R_\gamma(\xi')]^{1/(\gamma-\alpha_\varkappa)}\tau$$

si ottiene allora per ogni $\xi' \in E^{n-1}$

$$I(\xi') \leq C^{-1}[R^2_{\alpha_\varkappa}(\xi')]^{\frac{h+1/2-\gamma}{\gamma-\alpha_\varkappa}}[R^2_\gamma(\xi')]^{\frac{\alpha_\varkappa-h-1/2}{\gamma-\alpha_\varkappa}}\int_0^{+\infty}\tau^{2(h-\alpha_\varkappa)}(1+\tau^{2(\gamma-\alpha_\varkappa)})^{-1}d\tau,$$

da cui

$$\rho_h(\xi') \geq C'''(\gamma)[R_{\alpha_\varkappa}(\xi')]^{\frac{\gamma-h-1/2}{\gamma-\alpha_\varkappa}}[R_\gamma(\xi')]^{\frac{h+1/2-\alpha_\varkappa}{\gamma-\alpha_\varkappa}}, \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1}.$$

Ancora nel caso in cui è $\alpha_{\varkappa+1} = h + 1/2$, possiamo dare un'altra limitazione inferiore per $\rho_h(\xi')$. Poniamo

$$p(\xi') = R^2_{\alpha_\varkappa}(\xi')/R^2_{h+1/2}(\xi'), \quad q(\xi') = R^2_{h+1/2}(\xi')/R^2_{\alpha_{\varkappa+2}}(\xi'), \quad \xi' \in E^{n-1}.$$

Con la sostituzione $t = p(\xi')^{1/(2h+1-2\alpha_\varkappa)}\tau$ otteniamo

$$I(\xi') \leq R^{-2}_{h+1/2}(\xi')\int_0^{+\infty}\tau^{2h}(\tau^{2\alpha_\varkappa}+\tau^{2h+1}+q^{-1}(\xi')p(\xi')^{(2\alpha_{\varkappa+2}-2h-1)/(2h+1-2\alpha_\varkappa)}\tau^{2\alpha_{\varkappa+2}})^{-1}d\tau \leq$$

$$\leq R^{-2}_{h+1/2}(\xi')\left\{\int_0^1 \tau^{2(h-\alpha_\varkappa)}(1+\tau^{2h+1-2\alpha_\varkappa})^{-1}d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^{+\infty}\tau^{-1}(1+q^{-1}(\xi')p(\xi')^{(2\alpha_{\varkappa+2}-2h-1)/(2h+1-2\alpha_\varkappa)}\tau^{2\alpha_{\varkappa+2}-2h-1})^{-1}d\tau\right\} \leq$$

$$\leq R^{-2}_{h+1/2}(\xi')\left\{C_0 + \int_{q(\xi')^{-1/(2\alpha_{\varkappa+2}-2h-1)}p(\xi')^{1/(2h+1-2\alpha_\varkappa)}}^{+\infty} z^{-1}(1+z^{2\alpha_{\varkappa+2}-2h-1})^{-1}dz\right\}, \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1}$$

con C_0 costante positiva e $\tau = q(\xi')^{1/(2\alpha_\varkappa+2-2h-1)}p(\xi')^{-1/(2h+1-2\alpha_\varkappa)}z$. Dal lemma 2.3 *i)* segue che

$$q(\xi')^{-1/(2\alpha_\varkappa+2-2h-1)}p(\xi')^{1/(2h+1-2\alpha_\varkappa)} \leq C_0', \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1}$$

con C_0' costante positiva, onde

$$I(\xi') \leq R^{-2}_{h+1/2}(\xi')\left\{ C_0'' + \int\limits_{q(\xi')^{-1/(2\alpha_\varkappa+2-2h-1)}p(\xi')^{1/(2h+1-2\alpha_\varkappa)}}^{C'_0} z^{-1}dz \right\}, \qquad \forall\, \xi' \in E^{n-1},$$

con C_0'' costante positiva. Da questa segue l'ultima maggiorazione del teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CATTABRIGA, *Su un certo spazio funzionale. Un teorema di tracce*, in corso di stampa su « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa ».

[2] H. G. HEGGLESTON, *Convexity*, Cambridge, 1963.

[3] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*. Springer, 1963.

[4] P. I. LIZORKIN-S. M. NIKOL'SKII, *Classificazione delle funzioni differenziabili in base a spazi con derivate miste dominanti*, « Trudy Mat. Inst. im. V. A. Steklov », 77, 1965.

[5] M. PAGNI, *Sulle tracce di una certa classe di funzioni*, « Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena », 11, 1962.

[6] — —, *Un teorema di tracce*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », (8), 38, 1965.

[7] B. PINI, *Sulle tracce di un certo spazio funzionale*, I, « Rend. Accad. Naz. Lincei » (8), 37, 1964; II, ibidem, 38, 1965.

[8] L. R. VOLEVIC-B. P. PANEJACH, *Certi spazi di funzioni generalizzate e teoremi di immersione*, « Uspechi Mat. Nauk SSSR », 20, 1965.

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M.I.
il 31 oltobre 1966