Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

- N. N. Lebedev, I. P. Skolskaya, Y. S. Uflyand, Problems of mathematical physics, Prentice Hall inc., 1965 (Dario Graffi)
- Kiyosi Itô, H. P. McKean, Diffusion processes and their sample paths, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1965 (Antonio Pignedoli)
- Günther Hellwig, Differentialoperatoren der mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1964 (A. Pignedoli)
- E. Leimanis, The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1965 (C. Agostinelli)
- Mario Villa ed., Matematica Moderna nella scuola Media, Pàtron, 1965 (Angelo Pescarini)
- G. Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Walter De Gruyter e Co., Berlin, 1965 (Silvio Cinquini)
- J. Szarski, Differential inequalities, PWN - Polish scientific publishers, Warszawa, 1965 (Silvio Cinquini)
- J. Anastassiadis, Définition des fonctions eulériennes par des équations fonctionnelles, Gauthier-Villars, Paris, 1964 (F. G. Tricomi)
- P. Levy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1965 (Antonio Pignedoli)
- Edmond Combet, Solutions élémentaires des Dalambertiens généralisés, Gauthier-Villars, Paris, 1965 (Maria Cinquini Cibrario)
- J.B. Johnston, G. Baley Price, F. S. van Vleck, Linear Equations and Matrices, Addison-Wesley, Reading, 1966 (G. Capriz)
- B. A. Fuks, Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables, American Mathematical Society, Providence, 1965 (Edoardo Vesentini)
- L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965 (F. G. Tricomi)
- George Bachman, Introduction to p-adic numbers and valuation theory, Academic Press Inc., New York London, 1964 (Iacopo Barsotti)
- N. V. Yefimov, Forms and Matrices. An Itroductory Approach, Academic Press, New York London, 1964 (G. Capriz)
- B. R. Gelbaum, M. H. Olmsted,Counterexamples in Analysis, Holden-Day Inc., San Francisco, 1964 (G. C. Barozzi)
- K. O. Friedrich, From Pitagora to Einstein, Random House, New York, 1965 (Dario Graffi)
- P. L. Butzer, J. Korevaar eds., On Approximation Theory, Birkäuser Verlag, Basel Stuttgart, 1964 (U. Barbuti)
- C. Agostinelli, Magnetofluidodinamica, Ed. Cremonese, Roma, 1966 (Renato Nardini)
- Roger C. Lyndon, Notes on Logic, Van Nostrand, Princeton, 1966 (S. Ciampa)
- Claude Berge, Espaces topologiques. Fonctions multivoques, Dunod, Paris, 1966 (S. Ciampa)
- Folke K. G. Odqvist, Mathmatial Theory of Creep and Creep Rupture, Clarendon Press, Oxford, 1966 (G. Capriz)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.4, p. 421–449.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_4_421_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

RECENSIONI

N. N. LEBEDEV - I. P. SKOLSKAYA - Y. S. UFLYAND, *Problems of mathematical physics*, traduzione dal russo di R. A. Silvermann, Prentice Hall inc., 1965.

Come è noto le questioni più classiche della fisica matematica rientrano, in gran parte, nello studio di alcune equazioni alle derivate parziali (che possono essere omogenee e non omogenee o anche monodimensionali, bidimensionali, tridimensionali) ossia l'equazione di Laplace, l'equazione del calore, l'equazione delle onde. Comunque, nella fisica matematica, anche limitandosi alle equazioni ora citate, possono sorgere svariatissimi problemi, sia per la diversa forma del dominio in cui esse sono valide, sia per le differenti condizioni al contorno e iniziali con cui quelle equazioni debbono essere corre date. Perciò sono stati introdotti diversi metodi per risolvere i predetti pro blemi; si tenga presente inoltre che, nella fisica matematica, i risultati devono essere espressi da formule esplicite.

Nel libro in esame si trovano esposti, raggruppati secondo i metodi più opportuni per risolverli, circa seicento problemi relativi alla meccanica dei mezzi continui, alla trasmissione del calore, all'elettromagnetismo (in particolare all'elettrostatica) e che si riconducono alle predette equazioni, salvo qualcuno che può trattarsi solo con l'equazione delle onde smorzate o con quella per le vibrazioni di una trave. Di tutti i problemi, dopo s'intende una opportuna spiegazione del metodo per risolverli, è esposta la soluzione; di alcuni vi è anche una traccia del procedimento per raggiungerla, di altri infine tale procedimento è esposto con ogni dettaglio.

Il libro è diviso in otto capitoli. Il primo ha carattere introduttivo: con tiene esercizi sul modo di porre in equazione, con le relative condizioni iniziali e al contorno, questioni di fisica.

Il secondo capitolo, intitolato « Qualche speciale metodo per l'equazioni di tipo iperbolico e ellittico », contiene problemi tipo Cauchy per l'equazione delle onde e simili risolti, nei casi più semplici, mediante la soluzione di D'Alembert, in altri casi col metodo delle caratteristiche; inoltre contiene qualche esempio del metodo di Green per la soluzione delle equazioni di tipo ellittico ed. esempi di applicazioni della trasformazione conforme.

Nel terzo capitolo si considerano le oscillazioni libere e forzate in elasticità, acustica, elettromagnetismo; i problemi sono semplificati perchè le diverse grandezze variano, al trascorrere del tempo, con legge nota.

Nel quarto capitolo si espone un metodo che gli autori chiamano di Fou rier, e che potrebbe chiamarsi metodo di soluzioni semplici. In sostanza, si considerano problemi la cui soluzione è esprimibile mediante una serie o un integrale di soluzioni particolari ottenute per separazione di variabili. In questo capitolo si considerano principalmente equazioni omogenee, nel successivo si applica, in sostanza, lo stesso metodo (ora chiamato delle autofunzioni) per le equazioni non omogenee.

Nel sesto capitolo vengono esposti problemi che si presentano specialmente in domini che si estendono all'infinito e che conviene risolvere mediante trasformazioni integrali (Fourier, Hankel, Laplace, Mellin, etc.); gli esempi considerati in questo capitolo sono assai suggestivi.

Nel settimo capitolo si considerano quei problemi, che per la struttura dei domini a cui sono riferiti, sono risolubili solo mediante opportuni sistemi di coordinate curvilinee ortogonali, ad esempio ellittiche, paraboliche, bipolari, sferoidali, etc..

Infine nell'ultimo capitolo si trattano problemi (specie alcuni relativi alla diffrazione) che conviene ridurre ad equazioni integrali. Chiude il libro una appendice dovuta a E. L. Reiss, sui metodi variazionali e analoghi di frequente uso nella fisica matematica.

Il libro appare molto opportuno per tutti gli studiosi che intendono impadronirsi dei metodi della fisica matematica. Inoltre poichè gli esercizi trattati sono, nella massima parte, relativi a questioni concrete, si può rite nere la sua consultazione particolarmente utile al fisico e al tecnico.

DARIO GRAFFI

KIYOSI ITÔ ed H. P. MCKEAN, *Diffusion processes and their sample paths*, Springer-Verlag - Berlin, Heidelberg, New York, 1965.

Il volume è dedicato con ammirazione a P. Lévy, autore del celebre trattato. Una prefazione a carattere storico prende le mosse dalla scoperta di Robert Brown ed, attraverso le ricerche matematiche di L. Bachelier e di Alberto Einstein, giunge fino a dare l'idea concreta della impostazione delle dottrine moderne sull'argomento.

Alla prefazione seguono alcune « premesse » che, oltre rinviare il lettore a W. Feller, per quanto concerne il Calcolo delle probabilità (ed anche ad A. N. Kolmogorov) richiama i concetti di « algebre », di estensione di Borel, di « misure » probabilistiche etc., con le estensioni di Kolmogorov e con alcuni richiami specifici sulle funzioni misurabili (tra cui un teorema di Fubini). Segue il primo capitolo del volume, dedicato al moto browniano « standard ». Il capitolo prende le mosse dalla considerazione della « passeggiata aleatoria standard » per giungere al « moto browniano standard »; per occuparsi poi della costruzione di P. Lévy e giungere infine alla approssimazione del moto browniano mediante la « passeggiata aleatoria ».

Il secondo capitolo consta di undici paragrafi e vi è continuata la discussione del moto browniano. Il terzo capitolo è organizzato su nove paragrafi ed è dedicato alla diffusione « lineare » intesa in senso generale. Essa viene introdotta come un moto markoviano « in senso stretto » con traiettorie continue su di un intervallo lineare e con possibile « annichilazione della massa ».

Il quarto capitolo è dedicato allo studio dei cosiddetti « generatori » e consta di dodici paragrafi. Dopo una introduzione generale, si viene a considerare l'operatore differenziale G. Questo operatore è studiato in dettaglio: come operatore differenziale locale nel caso conservativo non-singolare; come operatore differenziale locale nel caso generale non singolare; indi in un punto singolare isolato. L'operatore stesso viene poi considerato come operatore differenziale globale sia nel caso singolare che nel caso non singolare.

In definitiva, lo studio dell'operatore in questione è condotto con metodi probabilistici analoghi a quelli usati da E. B. Dynkin. Allo scopo che il lettore di questa recensione abbia idea del processo di pensiero che conduce allo studio di cui stiamo parlando, cercheremo di porre, in sintesi, alcuni capisaldi concernenti la rigorosa impostazione matematica della teoria del moto browniano, come essa è nata dalle idee di Lebesgue, di Borel e di Daniell. Questa rigorosa impostazione matematica in senso moderno si fonda su una classica memoria di N. Wiener (Journal of mathem. Phys. 2, 131-174 (1923).

Si consideri lo spazio di traiettorie continue $w : t \in [0, +\infty] \rightarrow R^1$ con coordinate $x(t) = w(t)$ e sia B la più piccola algebra di Borel di sotto-insiemi B di questo spazio di traiettorie includente tutti gli eventi semplici $B = (w : a \leq x(t) < b)$ $(t \geq 0,\ a < b)$. Wiener ha stabilito l'esistenza di misure non negative di Borel $P_a(B)$ $(a \in R^1,\ B \in B)$ per le quali vale la seguente formula:

$$P_a[a_1 \leq x(t_1) < b_1,\ a_2 \leq x(t_2) < b_2, \ldots, a_n \leq x(t_n) < b_n] =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} g(t_1,\ a,\ \xi_1) g(t_2 - t_1,\ \xi_1,\ \xi_2) \ldots g(t_n - t_{n-1},\ \xi_{n-1},\ \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n,$$

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n,$$

la quale mette in rilievo il carattere markoviano della traiettoria browniana.

P. Lévy ha trovato un'altra costruzione del moto browniano e ha dato una descrizione profonda della « struttura fine » della traiettoria browniana individuale. In questo senso il lavoro di Lévy, con complementi dovuti a D. B. Ray, a Kiyosi Itô ed Henry P. McKean, Jr., poggia sul concetto di « mesure de voisinage » di P. Lévy stesso:

$$t(t,\ a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{\text{mis}\,(s : a \leq x(s) < b,\ \ s \leq t)}{2(b - a)}.$$

Dato un operatore di Sturm Liouiville

$$G = (C_2/2)D^2 + C_1 D (C_2 > 0)$$

sulla linea, la funzione delle sorgenti (di Green) $p = p(t,\ a,\ b)$ del problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Gu$$

ha, insieme col nucleo

$$g(t,\ a,\ b) = \frac{\exp(-|b - a)^2/2t)}{\sqrt{2\pi t}},$$

le proprietà:

$$0 \leq p, \qquad \int_{R^1} p(t,\ a,\ b) db = 1, \qquad p(t,\ a,\ b) = \int_{R^1} p(t - s,\ a,\ c) p(s,\ c,\ b) dc,$$

$$t > s > 0.$$

K. Itô ha fatto vedere che, se

$$|c_1(b) - c_1(a)| + |\sqrt{c_2(b)} - \sqrt{c_2(a)}| < \text{cost}\,|b - a|,$$

il moto associato con $G = (C_2/2)D^2 + C_1 D$ è identico come legge alla soluzione *continua* di

$$a(t) = a(0) + \int_0^t c_1(a) ds + \int_0^t \sqrt{c_2(a)} db,$$

dove b è un « moto browniano standard ». Progressi ulteriori sono dovuti a W. Feller. Dato un modo markoviano con traiettorie rappresentative $w : t \to x(t)$ e probabilità $P\ (B)$ su un intervallo lineare Q, gli operatori:

$$H_t : f \to \int P_a[x(t) \in db] f(b)$$

costituiscono un semigruppo:

$$H_t = H_{t-s} H_s \qquad (t \geq s),$$

ed E. Hille e K. Yosida hanno fatto vedere che è

$$H_t = e^{tG},$$

con una opportuna interpretazione dell'esponenziale, dove G è il « generatore » del semigruppo stesso.

D. Ray ha fatto vedere che, se il moto è strettamente markoviano, l'operatore G è *locale* se e soltanto se il moto ha traiettorie rappresentative *continue*. Ciò implica, in sostanza, che il generatore di un moto strettamente markoviano con traiettorie rappresentative continue (diffusione) possa essere espresso come operatore differenziale

$$(Gu)(a) \lim_{b \downarrow a} \frac{u^+(b) - u^+(a)}{m(a,\ b]}$$

dove m è una misura di Borel non negativa, positiva su intervalli aperti, e, con un cambiamento di scala

$$u^+(a) = \lim_{b \downarrow a} (b - a)^{-1}[u(b) - u(a)],$$

ad eccezione che in certi punti singolari in cui G degenera ad operatore differenziale di ordine ≤ 1.

E. B. Dynkin è arrivato pure all'idea di processo markoviano in senso stretto ed ha fornito una elegante espressione per l'operatore G.

Come abbiamo detto, nel quarto capitolo del volume di Kiyosi Itô ed Henry P. McKean jr., l'operatore G è calcolato dettagliatamente con metodi probabilistici analoghi a quelli di Dynkin. Nel caso « non-singolare » si tratta di un operatore differenziale

$$(Gu)(a) = \lim_{b \downarrow a} \frac{u^+(b) - u^+(a) - \int_{(a,\,b)} u\,dk}{m(a,\ b]}$$

dove K è una misura di Borel non-negativa, che « governa » la annichilazione della massa.

Il quinto capitolo dell'opera consta di quindici paragrafi ed è dedicato ai cambiamenti temporali e a quelli che si possono chiamare tempi di soppressione. Un paragrafo (il settimo) vi è dedicato ai moti browniani di Feller; il successivo all'importante esempio di Ikeda.

Il sesto capitolo, su otto paragrafi, di cui il sesto suddiviso in tre sottoparagrafi, concerne i tempi locali ed i loro inversi.

Il settimo capitolo è dedicato al moto browniano in più dimensioni, consta di ventuno paragrafi, dei quali il decimo e l'undecimo concernono una importante proposizione di Wiener, con applicazione, il decimosecondo e il decimo-terzo concernono, rispettivamente, il problema di Dirichlet e quello di Neu mann. Faremo presente ancora che il paragrafo decimoquarto riguarda il moto browniano spazio temporale:

$$z(s) = [t - s, \ x(s \ ]$$

$x(s) : s \geq 0$ essendo il moto browniano d-dimensionale standard ['Doob ha fatto vedere che il generatore del moto browniano spazio-temporale è $G = -\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta$ ed ha sfruttato ciò per trattare i problemi del calore

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta u = 0 \qquad (t, \ a) \in D \subset R^{d+1}$$

$$u = f \in C(\partial D) \qquad (t, \ a) \in \partial D$$

come problemi di Dirichlet].

L'ottavo capitolo del volume (su otto paragrafi) è dedicato ad una visione generale del problema della diffusione in più dimensioni.

L'opera costituisce una trattazione matematica molto moderna e profonda dei problemi del moto browniano. Bella la veste tipografica curata dall'editore Springer.

ANTONIO PIGNEDOLI

GÜNTER HELLWIG, *Differentialoperatoren der mathematischen Physik*, Springer-Verlag; Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964, di pagine 253, pr. 36 D.M.

Si tratta di una chiara esposizione concernente gli operatori differenziali che intervengono nelle moderne questioni fisiche, con particolare riguardo agli operatori di Schrödinger della Meccanica quantica.

L'opera consta di cinque capitoli, il primo dei quali è dedicato allo spazio hilbertiano in generale. L'Autore vi espone le definizioni e le proprietà essenziali degli spazî lineari, degli spazî metrici e degli spazi di Banach, per passare poi agli spazi hilbertiani ed alle loro proprietà (spazi di Hilbert completi, separabili, sottospazi densi). Il primo capitolo si conclude con paragrafi dedicati, rispettivamente, ai sistemi ortonormali in uno spazio hilbertiano, ai sistemi ortonormali completi, al processo di ortogonalizzazione di E. Schmidt.

Il secondo capitolo dell'opera concerne gli operatori lineari in uno spazio hilbertiano. L'esposizione prende le mosse dal concetto di autovalore e da quello di operatore reciproco per passare poi a considerare gli operatori simmetrici e semilimitati, indi gli operatori del tipo di Schrödinger (dopo opportune premesse concernenti alcuni principi essenziali della Meccanica quantistica e, prima di tutto, riguardanti il concetto di « funzione d'onda » e l'assioma fondamentale secondo il quale ad ogni grandezza meccanica viene associato un operatore avente dominio di definizione appartenente ad uno spazio hilbertiano, ed inoltre autoaggiunto).

Naturalmente vengono presi in considerazione quei particolari, importantissimi operatori di Schrödinger che sono gli operatori energetici; e viene dedicata speciale attenzione alla simmetria degli operatori di Schrödinger ed alla semilimitatezza dei medesimi.

Il terzo capitolo è dedicato alla teoria spettrale degli operatori completamente continui; il quarto alla teoria spettrale degli operatori di Schrödinger, scopo per il quale è indispensabile la teoria spettrale degli operatori autoaggiunti nello spazio hilbertiano.

Il quinto capitolo contiene una esposizione schematica della teoria spettrale dell'operatore differenziale di Weyl.

Quattro appendici concernono aggiunte e complementi ad argomenti esposti nella trattazione. Segue una esauriente bibliografia. L'opera, felicemente corredata di utili esempi e questioni suscettibili di sviluppo, esercita una efficace funzione di stimolo. Bella, al solito, la veste tipografica curata dall'editore Springer.

A. PIGNEDOLI

E. LEIMANIS, *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point.* Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg, New York, 1965.

Il volume, di poco più di 300 pagine di testo, è suddiviso in tre parti. La prima parte, la più estesa, è dedicata al moto di un singolo corpo rigido intorno a un punto fisso e si compone di tre capitoli. Il primo capitolo riguarda il classico problema del moto di un corpo rigido pesante intorno a un punto fisso e in esso vengono esposti in modo esauriente i diversi casi di integralità delle equazioni del moto, come quello di Poinsot, di Lagrange, della Kovalevska, nonchè le soluzioni particolari considerate da Steklov, Bobylev, Goryacev, Caplygin, Hess ed altri. Particolare interesse ha l'applicazione delle serie di Lie allo studio delle equazioni di Eulero-Poisson. Nel secondo capitolo viene considerato il moto di un corpo rigido, simmetrico o asimmetrico, *autoeccitato*, in cui cioè il momento delle forze agenti rispetto al punto fisso è un vettore fisso nel corpo o mobile in esso in un modo prescritto. In particolare vengono studiate le soluzioni periodiche nel caso in cui il vettore momento, variabile col tempo, è diretto secondo uno degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso. Questo problema, che se prima della propulsione a getto sembrava mancasse di significato fisico, oggi, coi vari espedienti usati per generare reazioni interne, tali da influenzare il moto di rotazione del corpo, ha assunto una importanza tutta particolare. Nel capitolo terzo infine si considera il moto di un corpo rigido eccitato esternamente da un momento vettore periodico rispetto al tempo. Questo problema interessa soprattutto l'Astronomia, in ispecie lo studio delle perturbazioni della rotazione terrestre intorno al suo asse sotto l'azione di forze derivanti dal sistema planetario. Così pure nella fisica atomica elettroni e nuclei in un campo magnetico di alta frequenza rappresentano giroscopi atomici soggetti a momenti periodici.

La parte seconda è dedicata essenzialmente al moto di diversi corpi rigidi accoppiati e precisamente si riferisce a un sistema meccanico S consistente di una parte invariabile S_1 e di altri corpi S_2, variabili o rigidi, ma non rigidamente connessi con S_1. Se le forze esterne applicate al sistema sono note, non è possibile lo studio del moto della parte invariabile S_1 senza prendere in considerazione il moto di S_2 relativo ad S_1. Uno dei casi più semplici di tali moti è quello per cui il moto di S_2 relativo ad S_1 non cambia la geometria delle masse del sistema S. Sistemi di questo genere vengono chiamati *girostati* e in essi rientra quello considerato da Volterra in cui il momento della quantità di moto relativo di S_2 rispetto ad S_1 è costante in grandezza e direzione. Queste questioni com'è noto trovano applicazione nel problema di Peano e cioè del moto dei poli terrestri causato dal momento angolare derivante dalle correnti di acqua negli oceani, come pure nel problema della variazione della latitudine sulla superficie terrestre, di cui si sono occupati Peano, Volterra, Steklov ed altri.

La parte terza infine è dedicata al moto dei satelliti artificiali della Terra. In un primo capitolo l'Autore studia il moto di un corpo rigido con un punto fisso in un campo di forze centrali newtoniano e ne considera la stabilità in diversi casi. In un secondo ed ultimo capitolo considera in modo dettagliato il moto di un satellite artificiale della Terra intorno al suo baricentro. Ora nella Meccanica celeste classica il moto di un corpo celeste viene decomposto nel moto del suo baricentro e nella rotazione intorno a quest'ultimo, trascurando l'effetto di rotazione del corpo sul moto del centro di massa. Ma in un campo gravitazionale non omogeneo i moti dei baricentri non sono a lungo indipendenti dalle rotazioni intorno ad essi. Per questo l'Autore imposta il problema generale del moto di $n+1$ corpi estesi e rotanti che si attraggono mutuamente con la legge di Newton, scrivendo prima le equazioni del moto assoluto, con riferimento ad una terra di assi ortogonali fissi, e poi le equazioni del moto relativo a uno dei corpi con riferimento ad una terna di assi di direzione invariabile e con l'origine nel baricentro di quel corpo. Considerando in particolare un satellite artificiale della Terra ne studia il moto di rotazione nell'ipotesi semplificativa che il moto del satellite intorno al suo centro di massa non influenzi il moto dello stesso centro, che suppone kepleriano. Si riferisce per questo ai lavori di F. L. Cernous'ko il quale integra le equazioni del moto applicando il metodo della media nella forma sviluppata da V. M. Volosov, e ne ricava delle soluzioni asintotiche. In particolare considera il caso in cui i momenti principali d'inerzia del satellite sono prossimamente eguali e quello in cui detti momenti d'inerzia sono arbitrari, ma la velocità angolare di rotazione del satellite nel suo moto relativo è molto più grande della velocità angolare nel suo moto orbitale.

L'opera, scritta con molta chiarezza e ricchezza di riferimenti bibliografici, è indubbiamente molto utile agli studiosi di problemi relativi ai moti giroscopici, al moto di un satellite artificiale, o ad argomenti connessi. Sono da rilevare al riguardo, nella ricca bibliografia, le molte citazioni dei lavori di autori italiani sugli argomenti trattati.

C. Agostinelli

Matematica Moderna nella scuola Media. A cura di Mario Villa, con la collaborazione di Luigi Campedelli, Emma Castelnuovo, Ugo Morin. Pàtron 1965, pp. XI+192.

Anche se può essere di cattivo gusto, siamo tentati di iniziare queste considerazioni con una nota polemica.

Fin dal 1962, si sono intravisti, in modo più o meno clandestino, certi corsi sperimentali per le classi pilota dell'insegnamento secondario.

Sono volumi litografati, dedicati agli insegnanti e agli allievi delle classi pilota, che raccolgono i corsi tenuti presso l'Università di Bologna e voluti dal M.P.I. in collaborazione con l'O.C.S.E..

Gli insegnanti che non seguirono quelle lezioni e che quindi non parteciparono alla sperimentazione didattica, erano e sono pur sempre interessati a seguire l'attività didattica dei loro colleghi, a valutare i risultati dell'esperienza fatta, ad avanzare eventualmente le critiche costruttive che ogni esperienza necessariamente comporta.

Ma come informarsi, come conoscere gli orientamenti di contenuto e di metodo dei varî corsi, come confrontare il lavoro fatto in Italia con quello analogo di altri Paesi?!

Una delle difficoltà più serie per lo sviluppo del Movimento in Italia, credo sia proprio da collegare all'assenza di quei libri dal commercio e in ogni caso, alla loro non facile reperibilità. Si può comprendere la cautela del Ministero nel non voler dare subitamente i crismi dell'ufficialità a libri per una sperimentazione, ma la nostra. osservazione riflette un risentimento diffuso e che lo stesso Prof. Villa non ha potuto tacere.

Anzi, Egli ha preso l'iniziativa insieme ad altri autorevoli colleghi per superare, sia pure parzialmente, questa situazione di disagio e ha raccolto in volume gli articoli più significativi che già erano apparsi nei corsi litografati cui si è fatto cenno.

Basterebbe questa decisione a rendere benemerita l'opera del curatore. Quale il criterio seguito per la scelta degli articoli?

Intanto il volume è dedicato ad insegnanti ed allievi della Scuola Media, anche se a nostro parere non è esclusa una sua possibile utilizzazione in altro ordine di scuole.

Il primo scritto, redatto dal Prof. Morin, porta il titolo « Insiemi e algebra » ed è diviso in cinque capitoli; Insiemi, Corrispondenze, Strutture algebriche, relazioni di equivalenza, i numeri naturali come cardinali di insiemi.

La prima impressione che emerge dalla lettura è che l'autore intenda offrire più una sicura guida per l'insegnante che un testo immediatamente destinato alla lettura di ragazzi di 11, 12 anni. A noi pare cioè che l'insegnante, sulla traccia di una trattazione così sobria, essenziale e rigorosa possa poi sviluppare la sua lezione e ambientarla nel clima particolare della sua classe. Molto spesso accade infatti che sulla nozione di insieme non sia facile conservare il quadro e il piano intuitivo delle nozioni da impartire. Morin offre una soluzione che, sia pure a diverso livello, noi stessi abbiamo sperimentato con successo.

Dunque l'articolo vuol essere propedeutico per una impostazione moderna dell'insegnamento matematico, ma sono anche molte le occasioni in cui l'autore suggerisce all'insegnante gli spunti per una considerazione unitaria di algebra e geometria, anche se ovviamente in forma occasionale.

Comunque la parte che ci è sembrata più personale, che meno forse si è valsa di suggestioni didattiche già diffuse, è quella che figura nel capitolo V e dedicata a « I numeri naturali come cardinali di insiemi ».

Questo argomento è, come ben noto, sempre minato da qualche insidia per cui l'alternativa che spesso si offre all'insegnante è quella di dare le cose come già note, o correre il rischio di uscire sprovvedutamente fuori dai limiti di una trattazione elementare.

Il prof. Morin considera i naturali come cardinali di insiemi finiti, dopo aver introdotto il concetto empirico di insieme finito.

Suppone l'esistenza di un insieme ambiente E (tale che per ogni insieme finito A' esista in E un insieme A ad esso equipotente) e per identificazione di ogni insieme finito col sottoinsieme di E ad esso equipotente, risulta che ogni insieme finito può essere considerato come sottoinsieme di E. Passando poi al quoziente nell'insieme delle parti $\mathfrak{P}E$, rispetto alla relazione di equipotenza, si ottengono i cardinali degli insiemi finiti o numeri naturali (si veda in proposito la traccia seguita da Papy in Mathématique Moderne I. Didier Bruxelles).

Questo articolo del Morin è molto ampio, eppure non sarebbe stato male rompere di tanto in tanto il carattere della trattazione per indicare le possibilità di equivoco, gli errori perniciosi e sempre possibili che anche una trattazione intuitiva degli insiemi può presentare.

Anche l'accenno più superficiale agli insiemi, al concetto di corrispondenza porta subito gli allievi in campo aperto e si potrebbero citare esempî in proposito. Basti pensare alla relazione di inclusione e al concetto di corrispondenza fra insiemi infiniti perchè possano cominciare subito i guai! Così, un accenno ai riflessi didattici del teorema di Cantor Bernstein non sarebbe stato inopportuno, visto che di fatto, anche gli allievi di una Scuola Media arrivano a porsi problemi del genere.

Ma forse noi interpretiamo male l'intenzione dell'autore che ha voluto piuttosto presentarci un modello sobrio ed essenziale di trattazione che, come già si diceva, è riuscita in modo limpido ed originale.

Altra invece ci pare l'intenzione del secondo articolo. Esso affronta le « trasformazioni elementari e le coniche dal punto di vista sperimentale » ed è redatto dalla Prof.sa Emma Castelnuovo.

Si tratta di un discorso rivolto direttamente agli scolari che sollecita all'osservazione, all'esperienza, che promuove un'attitudine euristica. Tale attitudine, quand'anche non giunga sempre alla conquista della nozione o del concetto matematico, è pur sempre il procedimento mentale che è alla base di ogni veridica acquisizione. Lo scritto della Castelnuovo si ispira da un lato ad una classica tradizione volta a cogliere i riferimenti fra matematica e natura (si pensi, sia pure ad altro livello, al libro del Weyl « La simmetria » Feltrinelli), dall'altra all'indirizzo di certa ispirazione di fondo della scuola geometrica italiana che in Belgio ha trovato ora la sua consacrazione per opera del Prof. Libois.

Ma Emma Castelnuovo qui, come nei suoi libri, fa qualcosa di assai utile e significativo in quanto riesce a fondere la propria personale esperienza con quella filtrata dall'ambiente internazionale e dall'attività dei colleghi che si muovono per la stessa strada. Questa esperienza subisce per opera sua una traduzione sensibile e personalissima nel vivo della lezione per cui, anche nella pagina scritta, la Castelnuovo fa sentire il clima della sua classe. Ciò è sorprendente perchè sappiamo quale sia il divario fra discorso scritto e quello parlato. Eppure Emma Castelnuovo riesce a tanto!

Nel terzo capitolo il Prof. Campedelli affronta « Le trasformazioni elementari dal punto di vista della geometria sintetica ».

Forse, proprio il carattere sintetico della trattazione, il ricorso alla rappresentazione sperimentale, la sopravvivenza di qualche operazione con riga e compasso, sono tutti elementi che concorrono a far sentire naturale il passaggio fra l'articolo della Castelnuovo e quello del Prof. Campedelli.

Qui il riferimento al concreto esiste ancora, ma già ad un altro livello di rappresentazione meno immediata. Il concreto è solo l'occasione per un sostegno intuitivo, ma ciò che più direttamente preme è il concetto matematico da raggiungere in modo non equivoco.

Lo scritto del Campedelli è costituito da otto capitoletti dai seguenti titoli: La simmetria assiale, la simmetria centrale, la rotazione, la traslazione, l'omotetia, la similitudine, l'affinità, l'inversione circolare. L'insegnate che deve interpretare i nuovi programmi delle scuole Medie e più particolarmente l'introduzione che li precede, trova qui una chiara interpretazione che può essere quasi immediatamente utilizzata nella stessa stesura che ne dà l'autore. È quasi superfluo ricordare la chiarezza e l'eleganza dello stile del Campedelli perchè ciò è ben noto a chiunque abbia avuto occasione di leggere uno qualsiasi dei suoi trattati. Preferiamo piuttosto sottolineare ancora una volta il nesso esistente fra lo scritto della Castelnuovo e quello del Campedelli. I due articoli potrebbero esistere insieme in modo autonomo perchè si intravvede nel fondo una comune ispirazione.

Il prof. Villa, che come già si è detto ha il merito notevole di avere curato il volume, ha riservato per sè la parte dedicata a « Le trasformazioni elementari e le coniche dal punto di vista della geometria analitica ».

Non so se nella scuola Media sia possibile arrivare a tanto, i nuovi programmi non lo lasciano supporre, ma c'è da augurarsi una loro modifica in tal senso. Del resto, le disposizioni Ministeriali per le prove scritte di licenza Media, insistevano proprio su esercizi quali quelli proposti dal Villa, ma non arrivavano a proporre la utilizzazione delle equazioni delle trasformazioni, quali la simmetria rispetto ad un punto, la traslazione, l'omotetia, l'affinità.

Eppure l'articolo del Villa è lì a dimostrare brillantemente che se l'allievo, dopo una trattazione sintetica può essere in possesso del concetto di trasformazione, il modo più naturale per utilizzarlo con sicurezza (almeno a questo livello di apprendimento) è quello suggerito dalla trattazione analitica. È così che l'esercizio può acquistare un certo grado di uniformità metodologica e costituire, fuori da ogni « routine », una base sufficientemente uniforme anche per il giudizio.

Concludendo, ci pare di dover suggerire a tutti gli insegnanti la lettura del libro per la sua indiscutibile utilità.

Resta comunque da segnalare un'impressione riassuntiva di fondo che qui non possiamo ignorare.

Se infatti si considera la diversa ispirazione che anima lo scritto del Morin (didatticamente più arduo), da quella seguita dagli altri autori, vien fatto di chiedersi se ciò non abbia radici più profonde che si ricollegano al diverso modo d'intendere la linea di rinnovamento del nostro insegnamento medio. Noi propendiamo per questa opinione anche se, a una prima lettura, tutto potrebbe apparire riducibile ad una questione di linguaggio.

Ci troviamo senz'altro di fronte a due vie che non sarebbe male si sviluppassero coerentemente anche in Italia, come sta già avvenendo in altri Paesi. È certo comunque che il libro avrebbe avuto altro rilievo se in tutti i capitoli vi fosse stata la presentazione di una trattazione di tipo uniforme ad uso degli allievi, più un commento didattico sull'argomento, ad uso degli insegnanti, che qui purtroppo è mancato. Altre soluzioni potevano esistere, ma si sarebbe inevitabilmente trattato di un discorso rivolto soltanto agli insegnanti, sia per dare la traccia di una trattazione, sia per fare un discorso di carattere scientifico-metodologico. Fuori di queste alternative resta soltanto il libro di testo per i ragazzi.

Questa interessante tematica pedagogica potrà in ogni modo ricevere nuovo impulso dalla prossima riforma dei licei con benefici riflessi anche per l'insegnamento matematico nella nuova scuola Media.

ANGELO PESCARINI

G. HOHEISEL, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Walter De Gruyter e Co., Berlin, 1965, pp. 142.

Si tratta della settima edizione di un volumetto sulle equazioni differenziali ordinarie.

La parte prevalente del Cap. I è dedicata all'equazione differenziale del primo ordine; e facciamo presente che, qui e anche nel successivo capitolo, la funzione incognita può essere un vettore a m dimensioni; naturalmente l'A. abbandona tale generalità, allorchè la trattazione diviene molto più perspicua per $m=1$. Nel caso, in cui l'equazione è posta sotto forma normale, vengono dati teoremi di esistenza e di unicità di una soluzione del problema di Cauchy, e di dipendenza continua dell'integrale dai valori iniziali e da un parametro. Un ulteriore teorema esistenziale si riferisce al caso, in cui l'equazione è data sotto forma implicita. Altri due paragrafi trattano, rispettivamente degli integrali singolari (considerati per $m=1$), e del comportamento (quando è $m=2$) di un integrale nelle vicinanze di un punto singolare. Chiude il capitolo un breve paragrafo, nel quale vengono dedotti i risultati per un'equazione differenziale di ordine m.

Con il Cap. II ha inizio lo studio delle equazioni differenziali lineari. Alla trattazione dell'equazione omogenea segue l'integrazione dell'equazione completa, realizzata sia mediante il metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange, sia ricorrendo alla funzione di Green. Infine viene considerato il caso, in cui l'equazione è a coefficienti costanti.

Oggetto del Cap. III sono argomenti classici della teoria dei problemi di valori al contorno per l'equazione lineare del secondo ordine: autovalori, sistemi di Sturm Liouville, proprietà dei sistemi di autofunzioni.

Ulteriori risultati per la stessa classe di equazioni figurano nel Cap. IV: teoremi di Sturm per la separazione delle radici degli integrali, numero delle radici di un integrale contenute in un intervallo, oscillazione e comportamento asintotico degli integrali.

Il volumetto fornisce allo studioso i fondamenti della teoria delle equazioni differenziali ordinarie, mentre per uno studio più profondo l'A. rinvia a opere più ampie, tra le quali sono citati i volumi italiani di F. Tricomi e di G. Sansone e R. Conti.

SILVIO CINQUINI

J. SZARSKI, *Differential inequalities*, PWN - Polish scientific publishers, Warszawa, 1965, pp. 256.

Si tratta di un volume (tomo 43 della collezione polacca di Monografie matematiche) sulle equazioni differenziali, nel quale la trattazione fa appello a disuguaglianze differenziali: tale idea, che risale a G. Peano (1893), T. H. Gronwall (1919), A. Haar (1928), E. Kamke, M. Nagumo (1938), è stata ampiamente sviluppata da diversi autori nell'ultimo ventennio; ma si deve rilevare fin d'ora, che la presente monografia tiene conto sopra tutto delle ricerche di T. Ważewski, dello stesso Szarski e di altri autori della stessa Scuola.

Dei risultati di teoria delle funzioni di variabile reale relativi a funzioni monotone (ricordiamo il lemma di Zygmund), che formano oggetto del breve Cap. I, viene subito fatta applicazione, nel successivo capitolo, allo studio delle soluzioni massima e minima dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Nel contenuto del Cap. III emergono tre teoremi di confronto, dei quali accenniamo il seguente: Dato un sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dt} = \sigma_i(t, y_1, \dots, y_n) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

ove è $t \geq 0$, $y_i \geq 0$, e le funzioni continue e non negative $\sigma_i(t, y_1, \dots, y_n)$ soddisfano a un'opportuna condizione di non decrescenza, sia $\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)$, $(0 \leq t < \alpha_0)$, con $\omega_i(0) = h_i$, $(i = 1, \dots, n)$, la soluzione massima a destra del sistema (1); allora, se $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$, $(0 \leq t < \gamma)$ sono funzioni continue e non negative, indicato con α_1 il minore dei due numeri α_0, γ e supposto che per $i = 1, \dots, n$ sia $\varphi_i(0) \leq h_i$, e anche

$$D_{-}\varphi_i(t) \leq \sigma_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

(ove, come è noto, $D_{-}\varphi_i$ è il numero derivato sinistro inferiore di Dini) nell'insieme E_i dei punti di $(0, \alpha_1)$ in cui è $\varphi_i(t) > \omega_i(t)$, risulta per $0 \leq t < \alpha_1$

$$\varphi_i(t) \leq \omega_i(t), \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Alla fine del capitolo vengono rilevate estensioni al caso, in cui il sistema (1) è costituito da un'infinità numerabile di equazioni e si trova nelle condizioni del teorema di esistenza di C. Carathéodory.

Nel Cap. IV si considera un'unica inequazione differenziale di ordine n, le cui proprietà sono dedotte dalla teoria sviluppata nei precedenti capitoli.

Il problema di Cauchy per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (o anche per un'unica equazione di ordine n) forma oggetto del Cap. V. Come applicazione dei risultati dei due precedenti capitoli l'A. valuta l'intervallo, in cui esiste la soluzione, e dà teoremi di unicità, di dipendenza continua della soluzione dai valori iniziali, e di stabilità della soluzione. Del contenuto del capitolo, oltre a estensioni al campo complesso, è da ricordare il metodo di S. A. Chaplygin (e i relativi risultati di N. N. Lusin) per un'equazione differenziale ordinaria

$$u' = f(t, u) \tag{2}$$

con la condizione iniziale

$$u(0) = u_0 , \tag{3}$$

ove la funzione $f(t, u)$ è continua assieme alla propria derivata parziale $f_u(t, u)$. Considerata una coppia di funzioni $\varphi_0(t)$, $\Psi_0(t)$ con $\varphi_0'(t) \leq f(t, \varphi_0(t))$, $\varphi_0(0) = u_0$; $\Psi_0'(t) \geq f(t, \Psi_0(t))$, $\Psi_0(0) = u_0$, si costruisce in modo ricorrente una successione di Chaplygin (φ_n, Ψ_n), $(n = 1, 2, \ldots)$ con il seguente procedimento: $\varphi_n(t)$ è l'unico integrale dell'equazione differenziale lineare

$$u' = f(t, \varphi_{n-1}(t)) + f_u(t, \varphi_{n-1}(t))[u - \varphi_{n-1}(t)]$$

soddisfacente alla condizione iniziale (3), mentre $\Psi_n(t)$ è l'unico integrale dell'equazione

$$u' = f(t, \varphi_{n-1}(t)) + \frac{f(t, \varphi_{n-1}(t)) - f(t, \Psi_{n-1}(t))}{\varphi_{n-1}(t) - \Psi_{n-1}(t)} [u - \varphi_{n-1}(t)]$$

soddisfacente alla (3).

Sotto l'ipotesi che $f_u(t, u)$ sia crescente rispetto a u, la successione di Chaplygin converge uniformemente verso l'unica soluzione dell'equazione (2) soddisfacente alla (3). Naturalmente il metodo stesso si estende al problema di Cauchy relativo a un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

Nel Cap. VI, in vista di successive applicazioni a equazioni a derivate parziali, vengono rilevate disuguaglianze relative a funzioni di più di due variabili.

Oggetto del Cap. VII è il problema di Cauchy sia per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine del tipo

$$u_x^i = f^i(x, y_1, \ldots, y_n; u^1, \ldots, u^m; u_{y_1}^i, \ldots, u_{y_n}^i). \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

con le condizioni iniziali

$$u^i(x_0, y_1, \ldots, y_n) = \mu^i(y_1, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{5}$$

sia per sistemi ultradeterminati della forma

$$u_{x_j}^i = f_j^i(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n; u^1, \ldots, u^m; u_{y_1}^i, \ldots, u_{y_n}^i), \tag{6}$$
$$(i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, p)$$

con le condizioni iniziali

$$u^i(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_p; y_1, \ldots, y_n) = \mu^i(y_1, \ldots, y_n), \qquad (i = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

ove, cioè, in ogni equazione del sistema (4) (così pure per il sistema (6)) figurano soltanto le derivate parziali di un'unica funzione incognita. Il campo funzionale, in cui sono considerate le soluzioni del sistema (6) [oppure (4)], è costituito dalle m-ple di funzioni $u^i(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n)$ [rispettivamente $u^i(x, y_1, \ldots, y_n)$], $(i = 1, \ldots, m)$, ognuna delle quali è continua nella piramide in cui è definita, è differenziabile rispetto al complesso delle variabili sulle superfici laterali della piramide, mentre nell'interno della piramide è deriva bile parzialmente rispetto a ciascuna variabile y_k, $(k = 1, \ldots, n)$ ed è differenziabile rispetto a $(x_1, \ldots, x_p)$. Nel contenuto del capitolo figurano teoremi di unicità e teoremi di dipendenza continua della soluzione dai valori iniziali, ottenuti usufruendo della teoria delle inequazioni differenziali ordinarie, mentre il campo di esistenza della soluzione viene valutato, mediante il metodo delle caratteristiche, nel caso, in cui il sistema (4) si riduce a un'unica equazione.

A questo capitolo si collega il IX, il quale è rivolto a sistemi di inequazioni a derivate parziali, per i quali vengono stabiliti teoremi di confronto, considerando nell'ipotesi e nella rispettiva tesi, sia disuguaglianze in senso forte, sia disuguaglianze in senso debole: come immediata conseguenza si ottengono teoremi di unicità per il problema di Cauchy relativo al sistema (6) con le condizioni (7).

A proposito del contenuto dei Capp. VII e IX si deve rilevare che, nè nei capitoli in questione, né nella bibliografia che figura alla fine del volume, è fatto alcun riferimento a risultati raggiunti da autori italiani, nemmeno per quanto si riferisce a teoremi di unicità relativi ai sistemi (4), stabiliti facendo appello a un procedimento, che, tra l'altro, generalizza il lemma di Haar, e valevoli sotto condizioni che, per qualche aspetto, sono più ampie [1].

Il Cap. VIII è dedicato ai sistemi di equazioni a derivate parziali del secondo ordine del tipo

$$(8)\qquad u^i_t = f^i(t, x_1, \dots, x_n;\ u^1, \dots, u^m;\ u^i_{x_1}, \dots, u^i_{x_n};\ u^i_{x_1x_1}, u^i_{x_1x_2}, \dots, u^i_{x_nx_n}), \qquad (i = 1, \dots, m),$$

vale a dire tali che in ciascuna equazione figurano le derivate parziali di una sola funzione incognita. Ogni funzione $f^i(\dots)$ è definita in ogni punto $(t, x_1, \dots, x_n)$ di un campo (aperto) D (di tipo C; per tale definizione si rinvia all'opera in esame) con $t_0 < t < t_0 + T$, e per tutti i valori reali di ciascuna delle altre variabili. Quale soluzione regolare del sistema (8) si intende ogni m pla di funzioni $u^i(t, x_1, \dots, x_n)$, $(i = 1, \dots, m)$, (ciascuna delle quali è continua nel campo chiuso corrispondente a D, e in ogni punto interno a D ammette continue le derivate parziali, che figurano nelle equazioni (8)), che soddisfa al sistema (8) nell'interno di D. L'A. considera due problemi misti, per ciascuno dei quali vengono dati teoremi di confronto, di unicità, di dipendenza continua della soluzione dai valori iniziali e da quelli al contorno, e di stabilità. Di diverso argomento tratta l'ultimo paragrafo del capitolo: sistemi di equazioni lineari di tipo iperbolico, in ciascuna delle quali figurano le derivate parziali seconde di un'unica funzione incognita; l'A. dà una dimostrazione, basata su inequazioni differenziali, della disuguaglianza dell'energia.

Al precedente capitolo si collega il X, oggetto del quale sono sistemi di inequazioni del tipo

$$u_t^i \leq f^i(\dots), \qquad (i = 1, \dots, m),$$

i cui secondi membri non differiscono dai secondi membri delle equazioni del sistema (8). Lo sviluppo della materia presenta una certa analogia con quello del Cap. IX: generalizzando risultati di Nagumo e di H. Westphal, l'A. stabilisce disuguaglianze deboli e forti, dalle quali seguono teoremi di unicità per il primo problema misto relativo al sistema (8). Alla fine del capitolo, con il metodo di Chaplygin, l'A. perviene anche a un teorema di esistenza per la particolare equazione

$$u_t = u_{xx} + f(t, x, u).$$

(1) Citiamo esplicitamente il volume: M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, Edizioni Cremonese, Roma, 1964, pp. VIII + 552, rilevando che nella bibliografia e anche nel testo figurano numerosi riferimenti a J. Szarski, T. Wazewski ecc., mentre nella monografia, che viene recensita, sono completamente ignorati, sia il volume citato nella presente nota, sia risultati contenuti nel volume stesso e precedentemente raggiunti da autori italiani.

Rileviamo esplicitamente che non viene fatto alcun riferimento, né nei Capp. VIII e X e nemmeno nella bibliografia, alle ricerche di W. Walter e a un recente risultato raggiunto dal recensore (2).

Il volume termina con il Cap. XI (redatto, assieme a quattro precedenti paragrafi, da W. Mlak), contenente estensioni agli spazi lineari.

Segue la bibliografia, la quale è ben preziosa per le indicazioni che fornisce nei riguardi delle ricerche della Scuola polacca, ma, come abbiamo già avuto occasione di rilevare, ignora completamente contributi di altri autori: in particolare è citato un unico lavoro dovuto ad autore italiano.

La lettura del volume è resa interessante da numerosi appropriati esempi, e non presenta difficoltà, perchè alla fine dell'opera figura un elenco dei simboli speciali, di cui l'A. ha fatto uso.

SILVIO CINQUINI

J. ANASTASSIADIS, *Définition des fonctions eulériennes par des équations fonctionnelles*, Mémorial Sc. Math. n. 156, Paris, Gauthier-Villars, 1964, 78 pp., 16 F.

Breve trattazione della teoria delle funzioni euleriane, principalmente delle funzioni *gamma* e *beta*, basata prevalentemente, ma non esclusiva mente, sulle relative equazioni funzionali, di cui la basilare è la ben nota equazione

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x);$$

come, del resto, è ormai abituale dopo la celebre *Einführung* di E. Artin del 1931.

Questa nuova trattazione — che non presenta speciali peculiarità — è però piuttosto avara nell'indicare le svariate rappresentazioni integrali di cui sono suscettibili le funzioni in esame, ciò che ne limita un po' l'utilità dal punto di vista applicativo.

F. G. TRICOMI

P. LEVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1965, di pagine 438, senza indicazione di prezzo (seconda edizione riveduta ed ampliata).

L'opera consta di una introduzione e di otto capitoli, seguiti da un complemento redatto per la seconda edizione e dedicato a progressi recenti della teoria delle « funzioni aleatorie laplaciane ». Questo complemento consta di ben tre capitoli, cui fa seguito una nota di M. Loève sulle funzioni aleatorie del secondo ordine.

(2) S. CINQUINI, *Sopra un teorema di unicità per un sistema non lineare di equazioni a derivate parziali del secondo ordine*, Atti del VII Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Genova 1963; *Sopra un teorema di unicità per un sistema di equazioni a derivate parziali non lineari di tipo parabolico*, Annali di Matematica pura e applicata, vol. LXVI (1964), pp. 117-128; *A proposito dell'unicità della soluzione per un sistema non lineare di equazioni a derivate parziali di tipo parabolico*, Rend. Seminario Matematico e Fisico di Milano, vol. XXXIV (1964).

Per quanto concerne la bibliografia, una parte della medesima è direttamente citata nel testo; numerosi lavori non direttamente citati sono menzionati, invece, alla fine del volume in una raccolta di riferimenti bibliografici molto ampia ed esauriente. La maggior parte dell'opera consiste — come afferma l'autore — in una esposizione d'insieme dei risultati ottenuti dall'autore stesso, relativamente ai processi additivi e al movimento browniano, nei suoi lavori usciti dal 1934 al 1939, oltre che di risultati più recenti.

L'Autore fa precedere a tale esposizione una trattazione generale concernente i processi stocastici ed un capitolo relativo ai processi stazionari, i quali processi, grazie ai lavori di Khintchine, Kampé de Fériet, Cramér, Loève, Blanc-Lapierre e Fortet, hanno dato luogo a notevoli progressi esplicativi ed interpretativi nel campo della ricerca scientifica moderna.

L'introduzione al volume contiene, nella sua seconda parte, alcuni richiami concernenti il Calcolo delle probabilità. Il primo capitolo prende le mosse dalla definizione della funzione $X(t)$ del « movimento browniano lineare », considerata per la prima volta da L. Bachelier e poi da N. Wiener; intendendosi per « movimento browniano lineare » una schematizzazione che bene rappresenta le proprietà del movimento browniano reale osservabili ad una scala molto piccola ma non infinitamente piccola e che suppone che le stesse proprietà esistono ad una scala qualunque. Viene poi considerata la cosiddetta « funzione ridotta » $\xi(t)$ e relativamente alla medesima si dà un teorema di invarianza proiettiva. Oltre al processo stocastico del moto browniano, nel primo capitolo è preso in esame un altro processo stocastico, il processo legato alla legge di Poisson.

Il secondo capitolo ha inizio con la definizione generale dei processi stocastici, nei quali, se non si ha degenerazione, il caso interviene ad ogni istante. La nozione è messa in rapporto con quella di funzione aleatoria. Si passa poi a trattare dei diversi modi di continuità dei processi e dei differenti tipi di derivate delle funzioni aleatorie.

Indi si introducono le nozioni fondamentali relative ai processi di Markov, cioè ai processi per i quali, ad ogni istante, le probabilità « attuali » degli eventi futuri dipendono soltanto da t e da $X(t)$ [quei processi per cui tali probabilità dipendono anche dal passato, cioè dai valori $X(\tau)$ per $\tau < t$, si chiamano *processi ereditari*].

I processi di Markov sono considerati come quelli per cui si applica un principio di Huyghens del Calcolo delle probabilità nel senso che la conoscenza del presente rende il passato e l'avvenire stocasticamente indipendenti l'uno dall'altro o meglio il passato si può considerare « agente » sull'avvenire *soltanto* attraverso l'intermediario rappresentato dal presente.

Si svolgono poi osservazioni generali sulle equazioni differenziali stocastiche (in particolare ci si occupa di una condizione sufficiente affinchè una equazione differenziale stocastica conduca ad un processo definito senza ambiguità).

Le « equazioni differenziali stocastiche » costituiscono una forma assai comoda per definire i processi di Markov, allo stesso modo che equazioni più generali, che si possono chiamare « equazioni integro-differenziali stocastiche », definiscono processi ereditari. Le equazioni differenziali stocastiche si deducono dalla teoria delle catene stocastiche mediante un passaggio al limite analogo a quello che conduce, nella Analisi classica, dalle successioni ricorrenti alle equazioni differenziali od integro-differenziali. Considerata una « catena stocastica » X_n, se si pensa X_n come il valore per $t = n\tau$ di una certa funzione aleatoria $X(t)$, tale funzione è conosciuta per i valori di t che sono multipli di τ. Se τ tende a zero, si è condotti a passare dalla nozione di catena stocastica a quella di processo stocastico e da quella di catena di Markov alla nozione di processo di Markov. Se si indica con $\delta X(t)$ una qualsiasi espressione di $X(t+dt) - X(t)$ abbastanza approssimata per definire il processo stocastico da cui dipende $X(t)$, un'equazione differenziale stocastica sarà della forma

$$\delta X(t) = \varphi[t,\ dt,\ X(t),\ \xi,\ \eta, \ldots],$$

dove ξ, $\eta, \ldots$ sono, per esempio, delle variabili laplaciane ridotte indipendenti le une dalle altre. Se $\delta X(t)$ dipende inoltre dai valori *passati* della funzione studiata, si avrà una equazione integro-differenziale stocastica. Così, per esempio, il processo di movimento browniano precedentemente considerato dall'Autore può essere definito mediante l'equazione differenziale stocastica

$$\delta X(t) = \xi \sqrt{dt},\ (dt > 0),$$

dove ξ è una variabile laplaciana ridotta; l'integrale della equazione soprascritta — che dà una rappresentazione simbolica — è

$$X(t) = X_0(t) + \int_{t_0}^{t} \xi \sqrt{dt},\ (t > t_0).$$

Nel terzo capitolo dell'opera l'Autore si occupa dei processi di Markov, cioè non ereditari. La trattazione prende le mosse dalla introduzione delle equazioni di Kolmogorov e di Chapman:

$$F(t_0,\ x_0;\ t,\ x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t_1,\ \xi;\ t,\ x) dF(t_0,\ x_0;\ t_1,\ \xi),$$

$$f(t_0,\ x_0;\ t,\ x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1,\ \xi;\ t,\ x) f(t_0,\ x_0;\ t_1,\ \xi) d\xi;$$

dove la funzione $F(t_0,\ x_1;\ t,\ x)$ è la « probabilità di passaggio », la quale, considerata come funzione di x, è una funzione di ripartizione, e dove (F assolutamente continua) f ne è la derivata (densità di probabilità). Il secondo paragrafo del capitolo concerne l'equazione di diffusione della probabilità:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B^2 u) - \frac{\partial}{\partial x} (Au),$$

dove $u(x,\ t)$ è la densità di probabilità e dove $A = A[t,\ X(t)]$, $B^2 = B^2[t,\ X(t)]$ sono rispettivamente la « velocità probabile » del punto $X(t)$ e la « velocità di dispersione ». Nel capitolo vengono mostrati, appunto, i ruoli rispettivi delle equazioni integrali di Kolmogorov e di Chapman e dell'equazione differenziale alle derivate parziali di diffusione della probabilità. Tali equazioni non si applicano se non nel caso di processi che definiscano funzioni « quasi sicuramente continue ». Nel caso del movimento browniano, l'equazione di diffusione è quella del calore.

Il quarto capitolo prende le mosse dalla nozione generale di « funzione aleatoria stazionaria » (cioè tale che, quali che siano l'intero positivo n e gli n valori $t_1,\ t_2, \ldots\ t_n$ di t, la legge ad n variabili $X(t_1)$, $X(t_2), \ldots,\ X(t\ )$ non dipenda che dalle differenze $t_i - t_j$). Nel capitolo stesso si dimostra il teorema di Khintchine, fondamentale per la teoria della correlazione per le funzioni aleatorie stazionarie.

Il capitolo si conclude con l'esposizione della teoria della derivazione delle funzioni aleatorie stazionarie e della analisi armonica relativa alle funzioni stesse.

Il quinto capitolo tratta dei processi additivi, partendo dalla esposizione di alcuni lemmi relativi alle serie a termini aleatorî indipendenti. Vengono definiti tre tipi di processi additivi cui corrispondono rispettivamente le funzioni aleatorie $X_0(t)$, $X_1(t)$, $X_2(t)$.

Si farà vedere poi che il processo additivo più generale è definito dalla formula di Lévy stesso:

$$X(t) = f(t) + X_0(t) + X_1(t) + X_2(t),$$

dove la funzione $f(t)$ non è aleatoria ed i tre termini aleatori sono stocasticamente indipendenti gli uni dagli altri.

Il primo tipo di processo additivo è quello cui corrisponde $X_0(t)$ somma di discontinuità fisse. Il secondo tipo è definito dalla formula:

$$X_1(f) - X_1(t_0) = \int_{t_0}^{t} \xi(t) \sqrt{dB(t)},$$

dove le $\xi(t)$ corrispondenti ai diversi valori di t sono delle variabili laplaciane indipendenti le une dalle altre.

Il terzo tipo è quello cui corrisponde la X_2H, somma o somma « compensata » di discontinuità mobili.

Il ruolo esercitato dal termine non aleatorio nella rappresentazione generale data dall'Autore è quello di eliminare tutte le discontinuità, che non siano salti, della funzione aleatoria studiata.

Si espongono poi il teorema reciproco, i processi additivi debolmente continui e teoremi relativi alla legge di Laplace. Un paragrafo del capitolo di cui stiamo parlando è dedicato al metodo di De Finetti e Kolmogorov (il principio di Kolmogorov utilizza una precedente idea di De Finetti) relativo ai particolari sistemi omogenei da questi ultimi autori considerati. Un paragrafo è dedicato ad un gruppo di leggi di Pearson. Il capitolo si conclude con la considerazione dei processi additivi negli spazî a più dimensioni euclidei e non-euclidei.

Il sesto capitolo è dedicato ad uno studio approfondito del movimento browniano lineare. Si danno molte formule relative alle leggi di probabilità da cui dipendono la funzione aleatoria $X(t)$ del movimento browniano lineare, i suoi valori estremi in un intervallo dato ed i valori di t più prossimi ad un valore dato ed ove $X(t)$ o si annulla o prende uno dei valori estremi considerati. Si danno anche molte proprietà « pressochè sicure » della funzione aleatoria $X(t)$. Va notato, in particolare, il risultato seguente: se $M(t)$ è il massimo di $X(\tau)$ nell'intervallo (O, t) e se ci si mette nell'ipotesi $X(0) = 0$, le funzioni aleatorie $|X(t)|$ ed $M(t) - X(t)$ sono stocasticamente identiche.

La nozione di « oscillazione browniana », introdotta nel primo paragrafo del capitolo sesto, del quale stiamo parlando, trova applicazione nel capitolo successivo.

Il capitolo settimo del volume si inizia con la definizione di una curva C del movimento browniano piano ed è dedicato allo studio, appunto, del moto browniano piano.

Sulla curva C viene dimostrato un torema fondamentale del seguente tenore: « È quasi sicuro che la curva C è un insieme di punti di misura superficiale nulla ».

Si dà, in seguito (Lévy), la definizione generale di area stocastica discutendo l'integrale del tipo:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [X_1(t) dX_2(t) - X_2(t) dX_1(t)]$$

dal punto di vista probabilistico. Circa le proprietà intrinseche della curva C, si dimostra che « le proprietà intrinseche stesse sono invarianti di fronte ad una rappresentazione conforme ».

L'ottavo capitolo tratta del moto browniano con più parametri.

In luogo della $X(t)$, si considera una funzione $X(A)$ di un punto A di un certo spazio. Essa gode di proprietà che generalizzano quelle della funzione $X(t)$ del moto browniano lineare.

Il teorema fondamentale in merito è quello che determina le condizioni di compatibilità così imposte ad $X(A)$. La dimostrazione di tale teorema viene fatta utilizzando un lemma di L. Schwartz. Il processo presenta proprietà non facilmente prevedibili (non ha la proprietà che pare costituire la naturale generalizzazione della non-ereditarietà delle funzioni aleatorie $X(t)$ di una sola variabile). Quando lo spazio ambiente del punto A aumenta indefinitamente di numero di dimensioni, si presentano proprietà eleganti, che si riallacciano a certe proprietà degli spazî hilbertiani.

$$X(A) = \Sigma f_\nu(A)\xi_\nu + g(A);$$

dove le ξ_ν sono delle variabili laplaciane ridotte, indipendenti le une dalle altre, l'insieme degli indici ν può essere finito od infinito ed anche non numerabile; inoltre le funzioni $f(A)$ debbono verificare, salvo in eventuali punti singolari, la condizione:

$$\sigma^2 \{ X(A) \} = \Sigma f_\nu^2(A) < \infty,$$

la quale implica che in ogni punto A vi sia al più una infinità numerabile di funzioni $f(A)$ che siano diverse da zero.

Il primo capitolo del complemento di cui stiamo parlando concerne, precisamente, le nozioni generali sulle funzioni aleatorie laplaciane; il secondo contiene nozioni complementari sul moto browniano classico ed, in particolare, teoremi di Dvoretsky, Erdös e Kakutani sulla curva C del moto piano; il terzo riguarda la funzione browniana di più parametri. Qui un paragrafo è dedicato alla funzione browniana nello spazio Ω di Hilbert, un altro al « determinismo » di $X(A)$ nello spazio di Hilbert.

La nota finale di M. Loève, concernente le funzioni aleatorie di secondo ordine, consta di tre parti: la prima sulle « covarianze », la seconda sulle « proprietà delle funzioni aleatorie del secondo ordine », la terza sulle « funzioni aleatorie a carattere esponenziale ». La classica opera — in bella veste tipografica — è corredata di incisivi esempi.

ANTONIO PIGNEDOLI

EDMOND COMBET, *Solutions élémentaires des Dalembertiens généralisés*, Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. CLX, Gauthier-Villars, Paris, 1965, pp. 1-96.

Il volume è dedicato alla costruzione delle soluzioni elementari scalari, tensoriali e spinoriali dell'operatore di D'Alembert generalizzato di una varietà riemanniana V_m, analitica, di tipo iperbolico e orientata. Il problema è studiato con un procedimento, che, da una parte, si riallaccia ai metodi classici di J. Hadamard, e, dall'altra, utilizza le funzioni olomorfe a valori distribuzioni di I. M. Guelfand e G. E. Chilov (*Les distributions*, Paris, 1962). Diamo, molto brevemente, un cenno del contenuto dei singoli capitoli.

Nel Cap. I, dopo aver richiamato alcuni risultati di geometria riemanniana, l'A. espone dettagliatamente alcune proprietà delle distribuzioni $\mathcal{P}^\lambda$, $(P \pm i0)^\lambda$, $\delta^{(k)}(P)$, introdotte da Guelfand e Chilov (l.c., Chap. III, § 2).

Nel Cap. II la varietà V_m è supposta analitica (C^ω) di metrica C^ω e di tipo ultra iperbolico. I calcoli sono fatti nell'intorno di un punto fissato x', distinguendo i casi di m dispari e di m pari; sono utilizzati, da un punto di vista moderno, alcuni tra i già citati procedimenti di Hadamard. Negli spazi armonici il problema è ricondotto alla risoluzione di equazioni differenziali del tipo di Fuchs.

Il caso particolare, in cui la varietà V_m è orientata, di classe C^ω e di tipo iperbolico normale forma oggetto del Cap. III; sono distinti anche qui i casi di m dispari e di m pari. Infine l'A. studia le soluzioni invarianti dell'equazione omogenea.

Il Cap. IV mostra come i risultati dei capitoli precedenti si possano estendere al caso tensoriale e spinoriale (quest'ultimo considerato nel caso particolare $m = 4$), nell'ipotesi che la varietà V_m sia riemanniana, analitica, di tipo iperbolico qualunque.

Nel Cap. V, sotto le stesse ipotesi circa la varietà V_m, è trattata l'invarianza per isometria dei nuclei elementari, dedotti dalle soluzioni elementari, e la costruzione di tali nuclei, quando V_m è C^∞; l'A. considera, infine, il caso iperbolico normale.

MARIA CINQUINI CIBRARIO

J. B. JOHNSTON, G. BALEY PRICE, F. S. VAN VLECK, *Linear Equations and Matrices*, Addison-Wesley Series in Behavioral Sciences. Addison-Wesley, Reading, Mass. U.S.A., 1966, pp. VIII+308.

Si tratta di un volume dedicato allo studio dei processi numerici per la soluzione di sistemi lineari di equazioni algebriche e ad alcune applicazioni dell'algebra lineare alle scienze sociali ed alla tecnica di conduzione delle imprese. L'esposizione è in forma molto piana anche perché il volume si indirizza a studenti di economia e scienze politiche; i teoremi sono lentamente evocati attraverso numerosi esempi prima di esser precisati e provati rigorosamente. Tipicamente, si considerano subito sistemi lineari indeterminati e si propone la ricerca delle sole soluzioni positive. Non si cita affatto il teorema di Rouché-Cappelli; neppure si introducono i determinanti. Vengono invece indicati i metodi di soluzione significativi in pratica, principalmente il metodo di eliminazione con la ricerca del perno.

I due capitoli sui sistemi sono seguiti da tre capitoli sulle matrici per mostrare i vantaggi della notazione matriciale. Qui pure si seguono processi operativi, anche, ad esempio, per giungere alla definizione di inversa di una matrice data. Un capitolo finale è dedicato alla dimostrazione della validità generale dei processi di calcolo indicati nei capitoli precedenti.

A se stanno due altri capitoli: uno su alcuni modelli matematici interessanti le scienze sociali; in sostanza su alcune proprietà delle matrici riducibili, che sono rilevanti per le nozioni sociometriche di comunicazione e di dominanza. L'altro su alcuni semplici modelli matematici di produzione e di scambio.

Ci sembra che il modo di esporre scelto dagli autori sia poco economico. Ad esempio, lo studente è avvertito che il processo di soluzione di un sistema lineare può fallire per la contradittorietà di qualche equazione, rilevata magari alla fine del processo — ma non è citata la condizione sintetica che esprime la contradditorietà. Per quanto, in pratica, il mal condizionamento di un sistema sia dichiarato dal fallimento del processo automatico di calcolo, non pare possa trascurarsi l'economia di pensiero derivante da un riferimento ad una sintetica condizione di compatibilità.

G. CAPRIZ

B. A. Fuks, *Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables*, Translations of Mathematical Monographs, Volume 14, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1965; VI+357.

Dopo le fondamentali ricerche pionieristiche di Kiyoshi Oka (1) e di Henri Cartan, la teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse si è rivelata uno dei campi più fertili della matematica moderna.

Terreno d'incontro di analisi, geometria e topologia, essa è stata matrice e banco di prova di alcuni fra i più suggestivi capitoli della ricerca attuale: dalla teoria dei fasci e degli spazi anellati, agli spazi analitici e varietà complesse, al teorema dell'indice, ecc..

Per il rapidissimo sviluppo di tutta la teoria e degli argomenti collaterali, i temi più strettamente pertinenti alle funzioni analitiche di più variabili (domini di olomorfia e di esistenza, problemi di Cousin, convessità, problemi di approssimazione, ecc.) non avevano ricevuto — fino a questi ultimi anni — trattazioni organiche, tranne che in corsi ciclostilati non sempre facilmente reperibili. Basti citare in proposito i famosissimi seminari H. Cartan 1951/52 e 1953/54 (2), un corso di B. Malgrange (3) e varie note ciclostilate di R. C. Gunning e H. Rossi (4).

In questi ultimi anni sono apparse finalmente ottime trattazioni a stampa, ad opera di M. Hervé (5), di R. C. Gunning-H. Rossi (6) e L. Hörmander (7).

Ad esse si aggiunge il volume in esame, che, insieme al libro dello stesso autore, *Theory of analytic functions of several complex variables* (8), costituisce la seconda edizione, riveduta ed ampliata, della monografia: *Teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse*, apparsa, in russo, nel 1948.

Il libro — la cui lettura presuppone una conoscenza approfondita di gran parte del volume del Fuks che lo precede — è diviso in cinque capitoli.

Nel primo, dedicato alla teoria dell'approssimazione, si stabilisce il teorema di Oka sull'approssimazione di funzioni olomorfe mediante famiglie complete, si studiano le coppie di Runge e si introduce la Kernel function di Bergman e la metrica invariante associata. Lo studio di quest'ultima viene sviluppato in buona parte del capitolo quinto, confrontandola con la metrica di Caratheodory, studiandone la curvatura ed esponendo alcuni risultati sulle isometrie e sulle varietà totalmente geodetiche, dovuti allo stesso Fuks. Chiu-

(1) Raccolte nel volume: K. Oka, *Sur les fonctions analyitiques de plusieurs variables*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1961.

(2) H. Cartan, Séminaire E.N.S., 1951-52; Séminaire E.N.S. 1953/54, Sécretariat Mathématique, Paris.

(3) B. Malgrange, *Lectures on the theory of functions of several complex variables*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1958 (Reissued, 1962).

(4) R. C. Gunning, *Local theory of complex variables*, mimeographed notes, Princeton, 1960; H. Rossi, *Global theory of several complex variables*, mimeographed notes, Princeton, 1961.

(5) M. Hervé, *Several complex variables, Local theory*, Oxford University Press, London, and Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1963.

(6) R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1965.

(7) L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1966.

(8) Pubblicato, nella traduzione inglese, come volume 8 della stessa collezione: Translations of mathematical monographs, a cura dell'American Mathematical Society.

de il primo capitolo lo studio delle successioni di domini e dei relativi problemi di approssimazione.

Il secondo capitolo, basato su una redazione di D. B. Fuks, è dedicato ad una rapida esposizione della teoria dei fasci analitici coerenti, dei teoremi A e B per le varietà di Stein, ed alla descrizione di alcune classiche conseguenze: primo e secondo problema di Cousin, problema di Poincaré, ecc..

Il terzo capitolo si volge allo studio dei problemi di convessità. Dopo aver esposto le proprietà fondamentali delle funzioni plurisubarmoniche, ed aver esaminato i classici risultati di Oka, con le estensioni di Bremermann e di Norguet, si introducono le frontiere di Bergman e di Silov. Si determinano tali frontiere in alcuni esempi significativi, e si fanno applicazioni alla teoria dell'approssimazione.

Nel quarto capitolo viene trattato il problema del completamento analitico dei domini. Problemi di questo tipo si presentano — ed attendono ancora una soluzione generale — nella teoria quantistica dei campi quando si tratta di estendere la matrice esprimente lo scattering. Tale problema ha dato origine ad importanti sviluppi, tipico dei quali è il cosiddetto « Edge of the Wedge theorem », che trova ampia trattazione in questo capitolo.

Infine il capitolo quinto, dedicato agli automorfismi analitici dei domini, contiene fra l'altro — oltre ai risultati di geometria differenziale ai quali si è accennato dianzi — una esposizione dei teoremi di H. Cartan ed una trattazione riassuntiva — dovuta a S. G. Gindikin — dei recenti progressi compiuti nella geometria dei domini limitati omogenei ad opera di I. I. Pjateckiĭ-Sapiro, E. B. Vinberg e dallo stesso Gindikin.

Nel complesso, il tono della trattazione è sovente ineguale. Gli ammodernamenti aggiunti all'edizione del 1948 non sembrano completamente assimilati nel testo. Tuttavia le parti più originali (ad esempio, quella sulla teoria dell'approssimazione e sulla geometria differenziale) forniscono molte idee suggestive sui problemi aperti nella teoria delle funzioni olomorfe di più variabili complesse.

EDOARDO VESENTINI

L. FEJES TÓTH, *Reguläre Figuren*, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1965, 316 pp. e 12 *Anagliphen*, $ 8.50, testo in tedesco.

Questo libro — di piacevole lettura, soprattutto per le belle figure (in parte a colori) che lo accompagnano — concerne cose tanto varie e tanto poco consuete, che non è facile spiegare in breve cosa precisamente riguardi e quale ne sia il carattere. Da un punto di vista generale si può solo dire che l'opera in esame — come, del resto, anche l'altro, noto libro dell'A. nei *Grundlehren* (*) — riguarda questioni di *geometria discreta*: denominazione sotto cui sogliono classificarsi problemi di divisione del piano e dello spazio in parti congruenti (dette *mosaici*), lo studio dei poliedri regolari, i problemi di *riempimento* e di *ricoprimento* e tante altre cose ancora.

Scendendo a qualche maggior particolare, dirò che l'opera è divisa in due parti, di cui la prima è quella che ha carattere maggiormente unitario e conduce a risultati più completi. Precisamente in questa prima parte si studiano — con metodi prevalentemente gruppali — le *figure regolari* del piano, dello spazio ordinario, ecc.; cioè delle configurazioni dotate di un più o meno alto grado di *simmetria*, vale a dire rientranti in sé con certe traslazioni o con certe rotazioni o con vere e proprie simmetrie, ecc. Fra

(*) L. F. TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel and im Raum*. Grundlehren d. math. Wiss. Bd. 65; Berlin usw., Springer, 1953.

esse i reticoli cristallini in S_3 (e i connessi gruppi cristallografici) e vari motivi ornamentali bidimensionali (egizii, greci, cinesi, rinascimentali, ecc.), alcuni dei quali così belli che potrebbero utilmente ispirare i disegnatori di carte da parato e simili. Vi si trova inoltre la considerazione di problemi analoghi negli spazi a curvatura costante (positiva o negativa) e, tornando in S_3, accanto a quello dei 5 classici poliedri regolari, un'accurato studio dei meno noti 4 poliedri « *semi-regolari* », dello stesso spazio, uno dei quali (effigiato sulla sopracoperta del volume) sembra una fantasia ispirata alle stellette che i nostri soldati portano sul bavero.

Nella seconda parte dell'opera — che ha carattere più frammentario e spesso apre dei problemi piuttosto che risolverli — si tratta invece prevalentemente della « *genesi* » delle figure regolari, cioè di cose analoghe a quella, ben nota, che il più denso riempimento del piano con dischi circolari fra loro congruenti, dà origine al *mosaico* degli esagoni regolari. Vi si discorre però anche di altre svariate cose, compresa la geometria dei grani di polline e il modo meno pericoloso di distribuire sulla superficie di una sfera un certo numero di litigiosi dittatori, nemici l'un dell'altro! Però in questa seconda parte abbondano, come si è già accennato (ma ciò accresce l'interesse del volume), i problemi non ancora completamente risolti o risolti solo in epoca ben recente, non di rado per merito dello stesso A. del volume. Tanto più che non si rimane solo negli spazi ordinari, ma si considerano anche problemi negli spazi non-euclidei e a più di tre dimensioni.

A proposito di una recente conferenza su questioni consimili, ho sentito fare l'obiezione che si tratta di cose inutili. Certo che non sono cose che — come diceva Peano — « fanno ribassare il prezzo del pane », ma — a parte il fatto che nella Matematica, specie odierna, è imprudente sollevare la questione dell'utilità — si può rispondere che almeno le cose considerate nel libro in esame sono belle, anzi talvolta bellissime, mentre certe altre ...

F. G. TRICOMI

GEORGE BACHMAN, *Introduction to p-adic numbers and valuation theory*, Academic Press Inc., New York and London, 1964, pp. VI+173, \$ 3,45.

È un libro di facile lettura, che presenta alcuni fra i risultati più fondamentali della teoria delle valutazioni, ed anche taluni risultati che, benchè elementari, non è facile trovare nella letteratura. È comprensibile dallo studente che abbia seguito un qualsiasi corso di algebra, ed è scritto in uno stile chiarissimo: non vi si usa nessuna tecnica stenografica per risparmiare parole, e inoltre le parole sono riunite in frasi sintatticamente impeccabili e ad interpretazione univoca (è un pregio che nella produzione scientifica contemporanea in lingua inglese non può più essere dato per scontato, e che va scomparendo anche in Italia come conseguenza dei « nuovi » metodi di insegnamento elementare). Il contenuto dei capitoli è il seguente:

Cap. 1 - Prima definizione delle valutazioni in un corpo; comprende sia le valutazioni non archimedee di rango 1, sia quelle archimedee (valori assoluti); viene usata normalmente la notazione moltiplicativa. Determinazione di tutte le valutazioni del corpo razionale. Topologia indotta da una valutazione, e teoremi di indipendenza e di approssimazione.

Cap. 2 - Completamenti di un corpo secondo una valutazione. Numeri p-adici e loro espressioni « decimali »; esempi. Elementi sulla teoria delle funzioni analitiche di variabile p-adica, e precisamente: derivata di una funzione, serie esponenziale, logaritmica, e binomiale con esponente intero p adico (questa parte mi pare che appaia per la prima volta in un libro; necessitando della notazione addittiva per le valutazioni p-adiche normalizzate, essa viene indicta con $\mathrm{ord}_p(\ )$, il che può generare in un lettore sprovveduto l'impressione che questo simbolo indichi un ente nuovo, anzichè la solita v( ) definita a p. 5). Unicità della valutazione di un corpo p-adico.

Cap. 3 - Questo capitolo è dedicato alla generalizzazione del concetto di valutazione nel senso di Krull. Contiene sezioni sugli anelli valutanti, sui posti, sui gruppi ordinati (anche non abeliani, ma questo è un raffinamento di cui non si fa mai uso), e sulle valutazioni (addittive) nel senso di Krull. Parla del rango di una valutazione, e termina con la relazione fra la chiusura aritmetica di un anello valutante in un prolungamento algebrico del corpo, e le estensioni della valutazione.

Cap. 4 - Questo capitolo si discosta dalle usuali trattazioni sull'argomento del libro in quanto introduce gli spazi vettoriali normati, su corpi valutati con colutazione archimedea o non archimedea di rango 1. Parla dei funzionali, dà il teorema di Hahn Banach, introduce le algebre di Banach, e termina col teorema di Gelfand secondo cui un'algebra di Banach che sia anche un corpo è il corpo complesso. Senza dubbio l'introduzione, un po' insolita, di queste nozioni riflette le preferenze dell'A.; benchè sia in genere considerato un pregio il ravvicinamento di teorie normalmente distaccate, non vedo come le nozioni esposte in questo capitolo possano giovare granchè a chi voglia imparare le valutazioni. L'unico uso che se ne fa nel seguito del libro è per dimostrare che ogni corpo con valutazione archimedea non banale è sottocorpo del corpo complesso (il che può essere fatto benissimo in altro modo); nè l'esperienza che ho nell'usare la teoria delle valutazioni come strumento di ricerca mi indica che vi sia una vera necessità dei risultati qui esposti.

Cap. 5 - Estensioni delle valutazioni a prolungamenti del corpo. Ramificazione e grado residuo. Teorema di ramificazione (con la disuguaglianza) per il caso del rango 1. Caratterizzazione dei corpi con valutazione archimedea non banale. Relazioni fra estensioni di una valutazione e completamento del corpo secondo quella valutazione. Esempi. Teorema di ramificazione (con l'uguaglianza) per le valutazioni discrete di rango 1.

Vi è infine un'appendice in cui si richiamano nozioni elementari di algebra. Il volume è corredato di esercizi, ed ha una bibliografia che elenca, accanto a trattati generali sull'argomento o su argomenti affini o preparatori, diversi lavori originali molto specializzati e probabilmente non abbordabili da chi ha avuto bisogno di studiare il libro, e delle dispense (lecture notes) non facilmente procurabili dai non professionisti della matematica.

IACOPO BARSOTTI

N. V. YEFIMOV, *Quadratic Forms and Matrices.* An Introductory Approach. (Tradotto da A. Shenitzer). Academic Press, New York e London, 1964, X+164 pp.

Si tratta di un volumetto destinato agli studenti di istituti tecnici in Russia. Vi si studiano in maniera del tutto elementare i problemi della riduzione a forma canonica delle coniche e delle quadriche; un terzo capitolo è dedicato alle proprietà delle matrici intese come operatori lineari, sempre con riferimento a matrici di ordine 2 e 3.

G. CAPRIZ

GELBAUM B. R., OLMSTED I. M. H., *Counterexamples in Analysis,* The Mathesis Series, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964, pp. XXIV+194, $ 7.95.

« Sia S la proposizione: Ogni elemento di A è elemento di B. Il tipo di questione più importante che si pone in matematica è precisamente il seguente: È vera la proposizione S? Dimostrare che tale proposizione è vera significa fornire una prova dell'inclusione $A \subset B$. Provare che S è falsa significa trovare un elemento di A che non appartiene a B, significa, in altre parole, trovare un controesempio ». Così gli Autori all'inizio della prefazione.

Il problema affrontato nel volume in esame è dunque uno dei problemi classici della matematica; ogni libro inerente a tale disciplina non può non riportare controesempi che valgano a precisare i teoremi dimostrati nel momento stesso in cui ne limitano la portata.

Per quanto riguarda in particolare l'analisi, non si può dimenticare che alcuni classici risultati in tale campo (basti per tutti la funzione continua non derivabile costruita da Weierstrass) sono precisamente controesempi. Non ci risulta, peraltro, che prima d'ora un intero volume sia stato dedicato alla costruzione di controesempi, circostanza questa che basterebbe da sola a rendere interessante l'opera in esame.

Articolato in tredici capitoli, il libro tratta approssimativamente tutti gli argomenti di analisi che attualmente vengono insegnati agli studenti di matematica delle nostre università durante i primi due o tre anni. Partendo da esempi abbastanza elementari sul corpo dei numeri reali, sulle funzioni di una variabile reale (derivazione e integrazione secondo Riemann), passa successivamente all'esame di casi meno semplici relativi alla convergenza uniforme, alle funzioni di più variabili, alla misura sulla retta e nel piano, per terminare con due interessanti capitoli sugli spazi topologici in generale e sugli spazi funzionali in particolare. Completano il volume un elenco dei simboli, un'accurata bibliografia ed un indice analitico.

L'opera si presenta come un ausilio senza dubbio utile per chiunque si accosti allo studio dell'analisi matematica con spirito critico.

G. C. BAROZZI

K. O. FRIEDRICH, *From Pitagora to Einstein,* Random House The L. W. Singer Comp. New York, 1965, pagg. VII+88.

Questo volumetto contiene una elementare, ma interessante e non priva di originalità, introduzione alla relatività. In sostanza, l'Autore, si propone di giungere, per via elementare, alle proprietà dei vettori nello spazio di Minkowski, proprietà essenziali nello studio della relatività ristretta. A questo scopo, premesse alcune considerazioni assai semplici sul teorema di Pitagora (di cui espone alcune dimostrazioni poco conosciute), sui numeri relativi e sui vettori dello spazio ordinario (definiti nella solita via geometrica), può, valendosi essenzialmente della relazione pitagorica (che diventa ora, anzichè una teorema, una definizione suscettibile anche di qualche modifica per tener conto degli spazi pseudo euclidei come quello di Minkowski), svolgere una teoria assiomatica completa per i vettori definiti da n numeri, cioè vettori immersi in uno spazio a n dimensioni euclideo o pseudo euclideo.

Come prima applicazione di questi risultati espone la teoria degli urti elastici e anelastici della Meccanica classica. Riferendosi poi, come si è accennato, agli spazi di Minkowski, ricava le principali formule e i più importanti risultati della relatività ristretta e, in particolare, svolge la teoria dell'urto nella Meccanica relativistica (opportunamente confrontata con la premessa teoria classica degli urti) giungendo infine a quelle fondamentali conseguenze che si sintetizzano nella celebre equazione di Einstein fra massa e energia.

Il libro, scritto con molta chiarezza, è di piacevole lettura e, come si augura l'Autore nella prefazione, offre ai docenti idee per una esposizione, nuova e forse più attraente, di qualche punto delle teorie relativistiche.

DARIO GRAFFI

On Approximation Theory, Proceedings of the Conference held in the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, Black Forest, August 4-10, 1963. Edited by P. L. Butzer and J. Korevaar; XVI+261; Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1964; sFr. 28.

Questo volume, quinto della collezione: International Series of Numerical Mathematics (I.S.N.M.), è presentato da P. L. Butzer (Techniche Hochschule Aachen) e da J. Korevaar (University of California, La Jolla) e raccoglie ventisei lavori (i primi venti ordinati secondo la loro presentazione alla Conferenza) di specialisti sull'argomento. Il volume è dedicato, su espresso desiderio dei partecipanti, alla memoria di Charles de La Vallée Poussin (mancato il 2 marzo 1962), del quale è riprodotta una fotografia e riportato un « hommage » di J. Favard (Università di Parigi).

Poichè una dettagliata recensione di ciascun lavoro uscirebbe dalle intenzioni che qui ci poniamo, ci limitiamo a dare qualche sommario cenno sulla materia trattata nelle Note, a nostro avviso, più aderenti all'argomento affrontato dalla Conferenza.

Avvertiamo anche, en passant, che una recensione circostanziata dei singoli Lavori apparirà sul Mathematical Review, come è stato annunciato su questa rivista al n. 2537 di p. 456 del mese di marzo 1966.

Va innanzitutto osservato che le varie Note sono alcune redatte in lingua inglese, altre nella tedesca; ciascuna è seguita da un sommario relativo alla discussione alla quale l'argomento trattato ha dato luogo; e vi appare anche un elenco di problemi nuovi e insoluti proposti da: G. Alexits, P. L. Butzer, R. Edwards, J. Favard, G. Freud, R. A. Hirscheld, J. Korevaar, G. G. Lorentz, W. Quade, P. O. Runck, I. J. Schoenberg e H. S. Shapiro, che riflettono, in larga partecipazione, come è avvertito nella presentazione del volume, alcune discussioni informali.

Queste Note danno atteggiamenti attuali della Ricerca in teoria della approssimazione; in esse vi si trovano problemi di saturazione (secondo J. Favard) di « algoritmi » rispetto a classi funzionali e a ordini di approssimazione: per algoritmi di sommazione per le serie di Fourier (cfr. l'articolo di G. Sunouchi), per operatori positivi (cfr. l'articolo di F. Schurer e quello di G. G. Lorentz); per integrali singolari con nucleo positivo (ed argomento il dato iniziale), esprimenti soluzioni di problemi iniziali di equazioni differenziali, come accade per i problemi la cui soluzione si esprime con la trasformata di Fourier, di Legendre e di Laplace, agenti sul dato iniziale (cfr. l'articolo di P. L. Butzer e quello di H. Berenz e P. L. Butzer); per operatori, o formule, d'inversione della trasformata di Fourier (cfr. l'articolo di J. L. B. Cooper).

Vi si trovano studiati metodi di confronto per processi di sommazione (J. Favard); questioni di rapidità di convergenza di successioni di operatori lineari in spazi di Banach (P. O. Runck); criteri per la determinazione di insiemi fondamentali (o varietà lineari dense) in spazi normati (H. Bras); questioni d'approssimazione con somme d'esponenziali (P. Milliavin); questioni d'interpolazione con « spline functions » e proprietà minimali (I. J. Schoenberg); questioni di approssimazione nel corpo complesso con polinomi i cui zeri appartengono ad un dato insieme (J. Korevaar); teoremi di Jackson in dimensioni alte (H. S. Shapiro e D. J. Newman); estensioni dei teoremi di Korovkin-Bohoman-Volkov Morozov, riguardanti la convergenza di successioni di operatori positivi, al caso di più dimensioni (G. Freud) ed altre svariate questioni, interessanti, anche se le passiamo, per brevità, sotto silenzio. Questo « Rendiconti » della conferenza mette, a nostro giudizio, bene a fuoco gli orientamenti, i progressi e gli interessi attuali della Ricerca in teoria della approssimazione, sicchè il volume, anche se non stampato negli ordinari caratteri, riesce utilissimo, non solo a coloro che di questo argomento si interessano in particolare, ma anche agli analisti, in genere, dato che, come è ben noto, la teoria della approssimazione non appare affatto un capitolo isolato dell'analisi generale.

U. BARBUTI

C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Monografie Matematiche a cura del C.N.R., n. 14, Ed. Cremonese, Roma, 1966, pp. XVI+678, £ 8.000.

Le ricerche di magnetofluidodinamica (M.F.D.), benchè abbiano avuto avvio da meno di un ventennio, hanno assunto uno sviluppo veramente imponente a seguito della sempre crescente produzione degli ultimi dieci anni. È perciò da salutare con soddisfazione l'uscita di questo volume, in cui l'Autore ha esposto in modo chiaro e sistematico buona parte dei principali risultati raggiunti dal nuovo corpo di dottrina; sono esposti anche numerosi risultati dovuti all'Autore (in particolare in alcuni paragrafi dei capitoli III, IV, VI e VIII).

Precede un'introduzione (pp. 10) in cui, dopo brevi cenni storici e un rapido panorama sulle applicazioni della MFD, viene dato ampio resoconto sugli argomenti trattati.

Nel I capitolo (pp. 57) si introducono le equazioni fondamentali della MFD dal punto di vista del continuo e se ne fa l'analisi dimensionale; segue lo studio dei principali effetti meccanici ed elettromagnetici; si espongono poi varie applicazioni a casi particolari.

Nel cap. II (pp. 35) si introducono le equazioni della dinamica del plasma dal punto di vista particellare, da cui si deducono le equazioni globali e quindi le equazioni della magnetogasdinamica.

Il cap. III (pp. 91) è dedicato alla magnetoidrostatica e a casi particolari di moti MFD stazionari e di equilibrio radiativo di masse gassose rotanti.

Il cap. IV (pp. 88) tratta di moti MFD vorticosi in generale, passando poi a vari casi particolari (moti vorticosi piani e a simmetria assiale; vortici cilindrici e sferici; moti in cui sono assegnati il vettore vortice e la corrente di conduzione).

Il cap. V (pp. 102) è dedicato alla stabilità in MFD; casi particolari trattati sono: stabilità di correnti laminari e dell'effetto *pinch*, instabilità termica in condizioni stazionarie, equilibrio e instabilità gravitazionale.

Il cap. VI (pp. 142) contiene un'ampia trattazione sulle onde MFD dovute a piccole perturbazioni, in mezzi compressibili o incompressibili, piane o cilindriche. Si passa poi allo studio dei fronti d'onda, e, in particolare, di onde piane o epicentrali e di superfici di discontinuità in alcuni moti MFD stazionari. Il capitolo termina con un paragrafo sulle onde d'urto.

Il cap. VII (pp. 52) si occupa della turbolenza in MFD, con particolare riferimento alla teoria statistica della turbolenza isotropa, alla dissipazione di energia e alle fluttuazioni della pressione

Il cap. VIII (pp. 103) infine inizia con lo studio del moto di una particella elettrizzata soggetta a un campo elettromagnetico, prosegue impostando la dinamica del plasma sulla base della teoria cinetica dei gas, soffermandosi in particolare sul caso di un gas completamente ionizzato, e si conclude con una breve trattazione su alcuni semplici casi di onde in un plasma

RENATO NARDINI

LYNDON, ROGER C., *Notes on Logic.*, Van Nostrand Mathem. Studies no. 6; Princeton 1966; p. VI+97; $ 2,50.

Nella piccola mole di quest'opera è contenuto un panorama abbastanza completo degli argomenti che oggi costituiscono un moderno corso di Logica. Il rigore espositivo è notevole, anche se talvolta si accompagna ad una certa stringatezza di linguaggio che può risultare nociva alla chiarezza. Lo stile, come lo stesso autore avverte v,uole essere informato a quello dell'algebra astratta.

La trattazione è accentrata sui rapporti tra implicazione semantica ed implicazione sintattica con minore enfasi sulle formalità tecniche che sui concetti e sui fatti che li collegano. Nell'opera sembra esser contenuto tutto l'essenziale per una netta visione di tali rapporti.

Nell'opinione del recensore, l'esposizione, pur procedendo speditamente senza soffermarsi troppo, talvolta, sui punti di meno facile acquisizione, è particolarmente adatta agli studenti di Matematica che vogliano in breve tempo impadronirsi delle idee fondamentali della logica moderna.

Lo schema della trattazione è semplice e moderno: volendo trattare delle relazioni tra *pensiero* (inteso nel senso di speculazione) e *fatti reali* (intesi come fatti esterni), si traducono questi oggetti di studio in *interpretazioni* in un certo *linguaggio* di certe *strutture*. Dopo aver brevemente trattato dei tre concetti ora menzionati, l'opera continua con gli argomenti classici in un corso di logica: algebra delle proposizioni, algebra di Boole, calcolo dei predicati e sua assiomatizzazione. Vengono poi trattati i teoremi di deduzione e di consistenza. È notevole che in una trattazione per sommi capi, come vuole essere quella dell'opera in esame, trovino posto argomenti non elementari come il teorema di compattezza per i modelli, il teorema di Herbrand-Gentzen, il teorema di Craig, ed altri.

Gli ultimi argomenti trattati sono i classici risultati di Goedel sulla incompletezza e di Church sulla indecidibilità.

Alcuni paragrafi sono seguiti da esercizi

L'opera si chiude con una bibliografia non molto estesa ma moderna ed essenziale e con gli indici dei nomi e degli argomenti.

S CIAMPA

BERGE, CLAUDE, *Espaces topologiques. Fonctions multivoques.* Dunod, Paris, 1966; 2e édit.; p. XII+283, 47 fig.; 42 F.

Si tratta della seconda edizione di un'opera apparsa per la prima volta nel 1959. Questa nuova edizione differisce lievemente dalla precedente: è stato soppresso il parag. 7 del cap. VI; il teorema di Hahn-Banach (cap. VII) è presentato in forma geometrica con una dimostrazione inedita di Ghouila-

Houri (simile a quella che si trova, per esempio, nel trattato di Köthe); un lungo paragrafo sui programmi lineari e non lineari è stato aggiunto alla fine del capitolo VIII.

L'opera tratta più o meno diffusamente, come meglio sarà precisato in seguito, dell'algebra degli insiemi e delle applicazioni tra essi, della topologia generale, degli spazi vettoriali topologici.

La trattazione è rivolta a studiosi in qualche modo familiari con le idee fondamentali dell'analisi matematica, sebbene, in linea di principio, nessuna conoscenza specifica sia preventivamente richiesta. Tuttavia, l'enfasi di particolari argomenti e la scelta di molti esempi rendono l'opera peculiarmente indicata per gli studiosi di alcune moderne applicazioni della matematica (teoria dei giochi, programmazione lineare, econometrica, ...) più che per quelli interessati alla topologia o agli spazi vettoriali topologici *per se*: per esempio, sono considerate anche le applicazioni plurivoche (cui vengono estese definizioni e proprietà delle applicazioni univoche), la convessità viene studiata molto dettagliatamente negli spazi euclidei R^n, molti teoremi riguardano la soluzione di sistemi di disequazioni oppure l'esistenza di punti uniti nelle applicazioni.

Il contenuto dei vari capitoli componenti l'opera è il seguente.

I primi due capitoli trattano degli insiemi e delle applicazioni tra essi: come già si è detto, il termine *applicazione* viene inteso anche nel senso di applicazione plurivoca (il termine *funzione*, tranne che nel titolo e nella prefazione, è spesso adoperato invece di applicazione univoca). Un esempio (a pag. 26) mostra l'utilità delle definizioni adottate.

Nel terzo capitolo si tratta degli ordinamenti e vi è un cenno sui numeri trasfiniti ordinali e cardinali. Dell'assioma della scelta vengono date le solite forme equivalenti.

Elementi di topologia generale sono contenuti nel capitoli IV, mentre uno studio più approfondito degli spazi metrici è fatto nel capitolo successivo che si chiude con un paragrafo sulle curve (giungendo alla caratterizzazione di Hahn Mazurkiewicz ed al torema di Jordan, entrambi senza dimostrazione) ed uno sui teoremi classici sulla continuità e convergenza uniforme.

La trattazione della topologia si esaurisce con il capitolo VI contenente la definizione e le proprietà della nozione di semicontinuità inferiore e superiore per un'applicazione (plurivoca) tra spazi topologici. In questo capitolo si trovano anche due teoremi sui punti uniti di applicazioni tra intervalli (in forma più generale si ritrovano nel capitolo VIII).

I successivi (ultimi) tre capitoli contengono vari argomenti legati alla teoria degli spazi vettoriali topologici. Più precisamente, il VII ed il IX capitolo contengono rispettivamente le definizioni ed i teoremi principali sugli spazi vettoriali e sugli spazi vettoriali topologici, mentre il capitolo VIII (il più lungo ed il più importante dell'intera opera) contiene un'approfondita trattazione della convessità negli spazi R^n, con numerosi teoremi relativi alle disuguaglianze ed all'esistenza di punti uniti. Questo capitolo contiene anche applicazioni degli argomenti trattati alle strategie ed alla programmazione.

Tutta la trattazione è illuminata da esempi, non ci sono esercizi. Un indice dei simboli adoperati si trova all'inizio del volume insieme all'indice del contenuto.

Si tratta, in conclusione, di una buona introduzione alla topologia generale ed agli spazi vettoriali topologici, specialmente in vista delle applicazioni di cui già si è parlato.

L'esposizione è moderna e presenta molti teoremi che si trovano, di solito, soltanto in trattati specializzati.

La veste tipografica è molto dignitosa: il recensore ha notato qualche raro errore di stampa e qualche cognome scritto in modo errato.

Il recensore osserva infine che sarebbe preferibile precisare meglio le ipotesi in qualche proposizione, per esempio nel coroll. 4 (pag. 169) e nel teor. 1 (pag. 257) quando si tratta dell'insieme G, il numero λ non può essere nullo.

Il grafico a pag. 107 non sembra disegnato correttamente.

S. CIAMPA

FOLKE K. G. ODQVIST, *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture.* Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, Oxford, 1966, 10 170 pp., 48 scellini.

Può sembrare strano di trovare questo titolo in una collana di monografie matematiche; in effetti la serie di Oxford contiene già altri volumi dedicati a gruppi di questioni fisico-matematiche, le quali sono ancora ben lontane dall'aver raggiunto una sistemazione assiomatica.

L'incerto stato delle teorie dello scorrimento è riflesso anche in questo volumetto, il quale, per la sua brevità, è forse meno soddisfacente del trattato di Finnie e Heller, ad esempio, come introduzione generale sull'argomento. L'Autore vi ha raccolto principalmente i risultati del lavoro suo e dei suoi collaboratori al Reale Istituto di Tecnologia di Stoccolma.

Vi si tratta, dopo due brevissimi capitoli introduttivi, delle seguenti questioni sempre da un punto di vista fenomenologico: trazione semplice; vari tipi di incrudimento; stati di stress complesso; problemi iniziali ed al contorno; l'analogia con problemi nella teoria dell'elasticità classica; deformazioni finite per piastre, membrane e travi; problemi di stabilità; rottura per trazione o sotto stress complesso, omogeneo o non omogeneo; effetti di rilassamento. C'è infine una raccolta di costanti per alcuni metalli e leghe.

Forse l'impostazione di molte questioni (quando si consideri anche l'attributo « matematico » che appare nel titolo) poteva esser fatta in maggior generalità, senza perdere in acutezza di risultati: ad esempio l'ipotesi che la velocità di deformazione sia proprio proporzionale ad una potenza della deformazione plastica può spesso essere abbandonata. Una discussione della legge di commutatività ed un esame delle sue conseguenze sarebbe pure stata desiderabile. Anche l'analogia con problemi della teoria dell'elasticità classica mantiene validità in ipotesi più ampie di quelle dichiarate dall'autore. Ma il valore del volumetto è nel proporre alla attenzione dei matematici un campo di scottante attualità al quale per ora si sono dedicati gli ingegneri sotto la pressante urgenza di problemi strutturali pratici; un campo che sicuramente offre interessanti prospettive ad un'indagine più tranquilla e meno legata a necessità concrete.

G. CAPRIZ