Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mario Pezzana

Sulle trasformazioni puntuali piane che si possono iperosculare in ogni coppia regolare con una trasformazione cubica. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.4, p. 395–405.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_4_395_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Sulle trasformazioni puntuali piane che si possono iperosculare in ogni coppia regolare con una trasformazione cubica

MARIO PEZZANA (Bologna) (*)

NOTA I

Sunto. - *In questo lavoro si trovano le equazioni di tutte le trasformazioni puntuali piane che si possono iperosculare in ogni coppia regolare di punti corrispondenti (a direzioni caratteristiche distinte), con una trasformazione cubica e si dà una costruzione geometrica delle trasformazioni stesse.*

1. Il problema che qui mi propongo di studiare, di trovare cioè le trasformazioni puntuali piane che si possono iperosculare in ogni coppia regolare con una trasformazione cubica, è già stato completamente risolto dal punto di vista locale da M. VILLA (1).

Partendo dai risultati del VILLA e facendo uso del metodo del riferimento mobile, con l'aggiunta delle relazioni che legano gli invarianti del terzo ordine (2), si perviene alla risoluzione completa del problema.

Impostato il sistema differenziale con il metodo detto, si trova immediatamente (n. 3) una condizione necessaria per l'iperosculazione; poi si procede con i metodi dell'analisi all'integrazione del sistema, ricorrendo a considerazioni geometriche ogni volta che queste agevolano il procedimento che la discussione analitica renderebbe troppo laborioso.

Giunti alla integrazione del sistema (n. 8), delle trasformazioni trovate si dà una costruzione che le caratterizza completamente anche dal punto di vista geometrico (n. 9).

2. Chiamiamo A, B una coppia regolare di punti corrispondenti in una trasformazione puntuale T tra due piani π e π', e A_1, B_1; A_2, B_2 due coppie di punti che si corrispondono in una omografia tangente a T in A, B.

(*) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito dell'attività del 26° Gruppo di Ricerca del Consiglio Nazionale della Matematica del C.N.R.

(1) M. VILLA, *Ricerche locali sulle trasformazioni cremoniane*, Memorie I, II, «Accademia delle Scienze di Bologna», Ser. X, Vol. I, pp. 189-198; Vol. II, pp. 117-126 (1944-45).

(2) M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali*, «Compositio Math.», 12, pp. 137-146 (1954).

Supposte A e B funzioni analitiche di due parametri u e v, in una regione di regolarità per T, si dovrà avere

$$\left| A, \frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial A}{\partial v} \right| \neq 0 \quad \text{e} \quad \left| B, \frac{\partial B}{\partial u}, \frac{\partial B}{\partial v} \right| \neq 0.$$

Prendiamo ancora A, A_1, A_2 come punti fondamental del riferimento mobile in π e B, B_1, B_2 analogamente in π'.

Le equazioni fondamentali della trasformazione saranno allora

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 \\ dA_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 \\ dA_2 &= \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 \\ dB &= \tau_{00}B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 \\ dB_1 &= \tau_{10}B + \tau_{11}B_1 + \tau_{12}B_2 \\ dB_2 &= \tau_{20}B + \tau_{21}B_1 + \tau_{22}B_2, \end{aligned} \tag{1}$$

dove le ω_1, ω_2 sono forma di PFAFF nei due parametri u, v, che si dicono principali, e le ω_{ik}, τ_{ik} sono ancora forme di PFAFF nei due parametri principali e in dieci parametri secondari ([3]).

Si hanno le formule di struttura

$$[d\omega_{ik}] = \sum_{0}^{2}{}_j\, [\omega_{ij}\omega_{jk}]. \tag{2}$$

La differenziazione esterna delle (2) conduce per un ben noto lemma di CARTAN all'esistenza di due forme quadratiche in ω_1, ω_2 che si indicano con Ω_1, Ω_2, tali che

$$\begin{aligned} \tau_{ii} - \omega_{ii} - \tau_{00} + \omega_{00} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \omega_i} \\ \tau_{ij} - \omega_{ij} &= \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \omega_i} \qquad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{3}$$

Le Ω_1, Ω_2 sono individuate dagli invarianti del secondo ordine della trasformazione e dall'omografia tangente.

([3]) Per i metodi e le notazioni si veda: E. ČECH, *Géométrie projective différentielle des correspondences entre deux espaces*, I, II, III, «Čas. pro Pest. Math. a Fys.», 74, 75, pp. 32-48, 123-136, 137-157 (1950).

Nel caso di trasformazioni puntuali fra piani, aventi le tre direzioni caratteristiche distinte e non indeterminate, poichè non esistono invarianti del secondo ordine, le Ω_1, Ω_2 sono note per tutte le trasformazioni e le (3), scegliendo opportunamente l'omografia tangente, si possono scrivere

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\tau_{11} - \omega_{11} - \tau_{00} + \omega_{00} &= -\,\omega_2\\
\tau_{21} - \omega_{21} &= -\,\omega_1\\
\tau_{12} - \omega_{12} &= -\,\omega_2\\
\tau_{22} - \omega_{22} - \tau_{00} + \omega_{00} &= -\,\omega_2 \ \text{(4)}.
\end{aligned}
$$

Differenziando esternamente le (4) si dimostra l'esistenza di due forme cubiche

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\theta_1 &= \alpha_{30}\omega_1^3 + 3\alpha_{21}\omega_1^2\omega_2 + 3\alpha_{12}\omega_1\omega_2^2 + \alpha_{03}\omega_2^3\\
\theta_2 &= \beta_{30}\omega_1^3 + 3\beta_{21}\omega_1^2\omega_2 + 3\beta_{12}\omega_1\omega_2^2 + \beta_{03}\omega_2^3
\end{aligned}
$$

tali che si ha

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
2\omega_{12} - 2(\tau_{10} - \omega_{10}) - \omega_2 &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\omega_1^2}\\
\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{21} - \tau_{20} + \omega_{20} &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\\
2\omega_{21} - \omega_1 &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\omega_2^2}\\
2\omega_{12} - \omega_2 &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\omega_1^2}\\
\omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{12} - \tau_{10} + \omega_{10} &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\\
2\omega_{21} - 2(\tau_{20} - \omega_{20}) - \omega_1 &= \frac{1}{6}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\omega_2^2}.
\end{aligned}
$$

Le θ_1, θ_2 sono legate agli invarianti del terzo ordine della trasformazione puntuale, e precisamente, se nell'intorno della coppia A, B le equazioni della trasformazione si scrivono

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\bar{x} &= x - xy + \frac{1}{6}(a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + [4]\\
\bar{y} &= y - xy + \frac{1}{6}(b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + [4]
\end{aligned}
$$

(4) VILLA, op cit. in (2), pag. 143.

si hanno le relazioni

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad & a_{30} = \alpha_{30}\,; \quad a_{21} = \alpha_{21} + 1\,; \quad a_{12} = \alpha_{12} + 1\,; \quad a_{03} = \alpha_{03} \\
& b_{30} = \beta_{30}\,; \quad b_{21} = \beta_{21} + 1\,; \quad b_{12} = \beta_{12} + 1\,; \quad b_{03} = \beta_{03}
\end{aligned}
$$ [5]

Si dimostra [6] che le θ_1, θ_2 dipendono della retta A_1A_2 del riferimento mobile e che cambiando tale retta i coefficienti α_{30}, α_{03}, β_{30}, β_{03} restano inalterati, mentre gli altri si alterano nel modo seguente

$$
(9) \qquad \bar{\alpha}_{21} = \alpha_{21} + \rho\,; \quad \bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12} - \rho\,; \quad \bar{\beta}_{21} = \beta_{21} - \sigma\,; \quad \bar{\beta}_{12} = \beta_{12} + \sigma.
$$

3. È noto [7] che ogni trasformazione puntuale fra piani, a direzioni caratteristiche distinte, iperosculabile con una trasformazione cubica in una coppia regolare di punti corrispondenti ammette la rappresentazione canonica

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
\bar{x} &= x - xy + xy^2 + [4] \\
\bar{y} &= y - xy + j_1x^3 + j_2x^2y + [4].
\end{aligned}
$$

Perciò, se una trasformazione puntuale piana a direzioni caratteristiche distinte è iperosculabile in ogni coppia regolare da una trasformazione cubica, le θ_1, θ_2 ad essa relative si possono scrivere, per le (8) e tenendo conto delle (9) (per $\rho = \sigma = 1$),

$$
(11) \qquad \theta_1 = 0\,; \qquad \theta_2 = 6a\omega_1^3 + 6b\omega_1^2\omega_2.
$$

Allora le (6) divengono

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
2\omega_{12} - 2(\tau_{10} - \omega_{10}) - \omega_2 &= 0 \\
\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{21} - \tau_{20} + \omega_{20} &= 0\,. \\
\omega_{21} &= \frac{1}{2}\,\omega_1 \\
\omega_{12} &= 3a\omega_1 + \left(b + \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\omega_{11} - \omega_{00} - \omega_{12} - \tau_{10} + \omega_{10} &= 2b\omega_1 \\
2\omega_{21} - 2(\tau_{20} - \omega_{20}) - \omega_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

[5] VILLA, op. cit. in [2], pag. 145.
[6] VILLA, op. cit. in [2], pag. 145.
[7] VILLA, op. cit. in [1], II, pag. 118.

Per differenziazione esterna delle (12), ricordando che si può sempre porre $\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0$, si ottengono tutte le ω_{ij} e le τ_{ij}

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
\omega_{00} &= -\frac{1}{3}\left(6a + 2b + \frac{1}{2}\right)\omega_1 - \frac{1}{3}\left(2b + \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\omega_{10} &= \sigma\omega_1 - \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\omega_{20} &= -\frac{1}{4}\omega_1 + \frac{1}{4}\omega_2 \\
\omega_{11} &= \frac{2}{3}\left(6a + 2b - \frac{1}{4}\right)\omega_1 + \frac{2}{3}\left(2b + \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\omega_{21} &= \frac{1}{2}\omega_1 \\
\omega_{12} &= 3a\omega_1 + \left(b + \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\omega_{22} &= -\frac{1}{3}(6a + 2b - 1)\omega_1 - \frac{1}{3}\left(2b + \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\tau_{00} &= -\frac{1}{3}\left(6a + 2b - \frac{1}{2}\right)\omega_1 - \frac{1}{3}\left(2b - \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\tau_{10} &= (\sigma + 3a)\omega_1 + \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\tau_{20} &= -\frac{1}{4}\omega_1 + \frac{1}{4}\omega_2 \\
\tau_{11} &= \frac{2}{3}\left(6a + 2b + \frac{1}{4}\right)\omega_1 + \frac{2}{3}\left(2b - \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\tau_{21} &= -\frac{1}{2}\omega_1 \\
\tau_{12} &= 3a\omega_1 + \left(b - \frac{1}{2}\right)\omega_2 \\
\tau_{22} &= -\frac{1}{3}(6a + 2b + 1)\omega_1 - \frac{1}{3}\left(2b - \frac{1}{2}\right)\omega_2 .
\end{aligned}
$$

Sostituendo le (13) nelle (1) si ottiene

$$
\begin{aligned}
dA &= \left[-\left(2a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{6}\right)\omega_1 - \left(\frac{2}{3}b + \frac{1}{6}\right)\omega_2\right]A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 \\
dA_1 &= \left[\sigma\omega_1 - \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}\right)\omega_2\right]A + \left[\left(4a + \frac{4}{3}b - \frac{1}{6}\right)\omega_1 + \left(\frac{4}{3}b + \frac{1}{3}\right)\omega_2\right]A_1 + \\
&\quad + \left[3a\omega_1 + \left(b + \frac{1}{2}\right)\omega_2\right]A_2
\end{aligned}
$$

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
dA_2 &= -\frac{1}{4}(\omega_1-\omega_2)A+\frac{1}{2}\omega_1A_1+\left[-\left(2a+\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}\right)\omega_1-\left(\frac{3}{2}b+\frac{1}{6}\right)\omega_2\right]A_2\\
dB &= \left[-\left(2a+\frac{2}{3}b-\frac{1}{6}\right)\omega_1-\left(\frac{2}{3}b-\frac{1}{6}\right)\omega_2\right]B+\omega_1B_1+\omega_2B_2\\
dB_1 &= \left[(\sigma+3a)\omega_1+\left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}\right)\omega_2\right]B+\left[\left(4a+\frac{4}{3}b+\frac{1}{6}\right)\omega_1+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{4}{3}b-\frac{1}{3}\right)\omega_2\right]B_1+\left[3a\omega_1+\left(b-\frac{1}{2}\right)\omega_2\right]B_2\\
dB_2 &= -\frac{1}{4}(\omega_1-\omega_2)B-\frac{1}{2}\omega_1B_1+\left[-\left(2a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}\right)\omega_1-\left(\frac{2}{3}b-\frac{1}{6}\right)\omega_2\right]B_2\,.
\end{aligned}
$$

Intanto dalle (14) si ottiene subito

$$
\begin{aligned}
d(A-2A_2) &= \left[-\left(2a+\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}\right)\omega_1-\left(\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}\right)\omega_2\right](A-2A_2)\\
d(B+2B_2) &= \left[-\left(2a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}\right)\omega_1-\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{3}\right)\omega_2\right](B+2B_2).
\end{aligned}
$$

Queste ultime ci dicono che in entrambi i piani c'è un punto fisso, cioè una delle congruenze di curve caratteristiche è un fascio di rette. Con le notazioni usate, saranno le $\omega_1=0$.

Si ha perciò una prima *condizione necessaria affinchè una trasformazione puntuale fra piani sia iperosculabile con una trasformazione cubica*, ed è che *una delle congruenze di curve caratteristiche sia un fascio di rette.*

Per le (13) si ha

$$
[d\omega_1]=2b[\omega_1\omega_2]\,;\qquad [d\omega_2]=b[\omega_1\omega_2].
$$

Perciò le forme ω_1, ω_2 sono differenziali esatti se e solo se $b=0$. Per $b\neq 0$ sarà invece un differenziale esatto la forma $\omega_1-2\omega_2$.
Esaminerò i due casi separatamente.

4. Per $b=0$ le (1) divengono

$$
\begin{aligned}
dA &= -\left[\left(2a+\frac{1}{6}\right)\omega_1+\frac{1}{6}\omega_2\right]A+\omega_1A_1+\omega_2A_2\\
dA_1 &= \left(\sigma\omega_1-\frac{1}{4}\omega_2\right)A+\left[\left(4a-\frac{1}{6}\right)\omega_1+\frac{1}{3}\omega_2\right]A_1+\left(3a\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2\right)A_2
\end{aligned}
$$

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
dA_2 &= -\frac{1}{4}(\omega_1-\omega_2)A+\frac{1}{2}\omega_1A_1-\left[\left(2a-\frac{1}{3}\right)\omega_1+\frac{1}{6}\omega_2\right]A_2\\
dB &= -\left[\left(2a-\frac{1}{6}\right)\omega_1-\frac{1}{6}\omega_2\right]B+\omega_1B_1+\omega_2B_2\\
dB_1 &= \left[(\sigma+3a)\omega_1-\frac{1}{4}\omega_2\right]B+\left[\left(4a+\frac{1}{6}\right)\omega_1-\frac{1}{3}\omega_2\right]B_1+\left(3a\omega_1-\frac{1}{2}\omega_2\right)B_2\\
dB_2 &= -\frac{1}{4}(\omega_1-\omega_2)B-\frac{1}{2}\omega_1B_1-\left[\left(2a+\frac{1}{3}\right)\omega_1-\frac{1}{6}\omega_2\right]B_2 .
\end{aligned}
$$

Posto $\omega_1=du$, $\omega_2=dv$ e indicando con x, x_1, x_2 rispettivamente le coordinate di A, A_1, A_2 e analogamente con y, y_1, y_2 quelle di B, B_1, B_2 le (15) danno i sistemi di equazioni differenziali

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= -\left(2a+\frac{1}{6}\right)x+x_1 & \frac{\partial y}{\partial u} &= \left(-2a+\frac{1}{6}\right)y+y_1\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{1}{6}x+x_2 & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1}{6}y+y_2\\
\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \sigma x+\left(4a-\frac{1}{6}\right)x_1+3ax_2 & \frac{\partial y_1}{\partial u} &= (\sigma+3a)y+\left(4a+\frac{1}{6}\right)y_1+3ay_2\\
\frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 & \frac{\partial y_1}{\partial v} &= -\frac{1}{4}y-\frac{1}{3}y_1-\frac{1}{2}y_2\\
\frac{\partial x_2}{\partial u} &= -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x_1+\left(-2a+\frac{1}{3}\right)x_2 & \frac{\partial y_2}{\partial u} &= -\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}y_1+\left(-2a-\frac{1}{3}\right)y_2\\
\frac{\partial x_2}{\partial v} &= \frac{1}{4}x-\frac{1}{6}x_2 & \frac{\partial y_2}{\partial v} &= \frac{1}{4}y+\frac{1}{6}y_2 .
\end{aligned}
$$

Da queste si ottengono subito, eliminando le funzioni x_1, x_2, y_1, y_2, le equazioni

$$
(17)\qquad x_{vv}+\frac{1}{3}x_v-\frac{2}{9}x=0;\qquad y_{vv}-\frac{1}{3}y_v-\frac{2}{9}y=0
$$

che integrate danno

$$
(18)\qquad x=\lambda e^{\frac{1}{3}v}+\mu e^{-\frac{2}{3}v};\qquad y=\eta e^{\frac{2}{3}v}+\theta e^{-\frac{1}{3}v}
$$

con λ, μ, η, θ funzioni della sola variabile u.

Come le (17) si ottengono le

$$
(19)\quad \begin{cases} x_{uu}-\left(\sigma+8a^2+\frac{5}{6}a-2a_u-\frac{1}{36}\right)x-3ax_v-\left(2a-\frac{1}{3}\right)x_u=0 \\ x_{uv}-\left(2a-\frac{1}{9}\right)x-\frac{1}{3}x_u+\left(2a-\frac{1}{3}\right)x_v=0. \end{cases}
$$

Sostituendo nella seconda delle (19) il valore trovato per la funzione x, λ si elimina e si trova per la μ l'equazione

$$
(20)\qquad \mu'+\left(2a-\frac{1}{3}\right)\mu=0.
$$

Per la (20), a risulta funzione della sola u.

Sostituendo allora x nella prima delle (19) e tenendo conto della (20), si ottiene

$$
(21)\qquad \sigma=-\frac{3}{2}a+\frac{1}{4}.
$$

Allora la prima delle (19) dà per λ l'equazione

$$
(22)\qquad \lambda''-\left(2a-\frac{1}{3}\right)\lambda'-\left(8a^2+\frac{1}{3}a-2a_u+\frac{2}{9}\right)\lambda=0.
$$

La (20) integrata dà

$$
(23)\qquad \mu=c_1e^{-\int\left(2a-\frac{1}{3}\right)du}.
$$

Ponendo nella (22) $\lambda=\gamma e^{-\int\left(2a+\frac{1}{6}\right)du}$, essa diviene

$$
(24)\qquad \gamma''-6a\gamma'-\frac{7}{36}\gamma=0.
$$

Sempre operando sulle (16), per eliminazione di y_1, y_2 e tenendo conto della (21) si ha

$$
(25)\quad \begin{cases} y_{uu}-\left(8a^2+\frac{2}{9}a+\frac{2}{9}-2a_u\right)y-\left(2a+\frac{1}{3}\right)y_u-3ay_v=0 \\ y_{uv}+\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{9}\right)y+\frac{1}{3}y_u+\left(2a+\frac{1}{3}\right)y_v=0. \end{cases}
$$

Sostituendo y nella seconda, θ si elimina e si ottiene per η l'equazione

$$\eta' + \left(2a + \frac{1}{3}\right)\eta = 0 \tag{26}$$

che integrata dà

$$\eta = d_1 e^{-\int\left(2a+\frac{1}{3}\right)du} \tag{27}$$

Ponendo tale valore di η nella prima, si ottiene per θ l'equazione

$$\theta'' - \left(2a + \frac{1}{3}\right)\theta' - \left(8a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{2}{9} - 2a_u\right)\theta = 0. \tag{28}$$

Per $\theta = \delta e^{-\int\left(2a-\frac{1}{6}\right)du}$, la (28) diventa

$$\delta'' - 6a\delta' - \frac{7}{36}\delta = 0. \tag{29}$$

Si osservi che la (24) e la (29) coincidono; perciò γ e δ sono integrali generali della stessa equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Esse saranno allora combinazioni lineari delle stesse due funzioni della sola u, che chiamerò φ e ψ.

I risultati ottenuti danno

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{-\int\left(2a-\frac{1}{3}\right)du} e^{-\frac{2}{3}v} + c_2\varphi e^{-\int\left(2a+\frac{1}{6}\right)du} e^{\frac{1}{3}v} + \\ &\qquad + c_3\psi e^{-\int\left(2a+\frac{1}{6}\right)du} e^{\frac{1}{3}v} \\ y &= d_1 e^{-\int\left(2a+\frac{1}{3}\right)du} e^{\frac{2}{3}v} + d_2\varphi e^{-\int\left(2a-\frac{1}{6}\right)du} e^{-\frac{1}{3}v} + \\ &\qquad + d_3\psi e^{-\int\left(2a-\frac{1}{6}\right)du} e^{-\frac{1}{3}v}. \end{aligned} \tag{30}$$

Le (30) danno, a meno di omografie, le equazioni parametriche della trasformazione

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi e^{-\int\left(2a+\frac{1}{6}\right)du} e^{\frac{1}{3}v} & y_1 &= \varphi e^{-\int\left(2a-\frac{1}{6}\right)du} e^{-\frac{1}{3}v} \\ x_2 &= \psi e^{-\int\left(2a+\frac{1}{6}\right)du} e^{\frac{1}{3}v} & y_2 &= \psi e^{-\int\left(2a-\frac{1}{6}\right)du} e^{-\frac{1}{3}v} \\ x_3 &= e^{-\int\left(2a-\frac{1}{3}\right)du} e^{-\frac{2}{3}v} & y_3 &= e^{-\int\left(2a+\frac{1}{3}\right)du} e^{\frac{2}{3}v}. \end{aligned} \tag{31}$$

Le (31) mostrano che si può sempre supporre $\gamma = \delta$, a meno di omografie.

Resta perciò da risolvere la (24) o (29). In tali equazioni però figura a che resta funzione arbitraria di u.

Si può allora supporre arbitrario un integrale particolare φ dell'equazione (24) e ricavare a da quest'ultima.

Si ha

$$a = \frac{36\varphi'' - 7\varphi}{108\varphi'}. \tag{32}$$

Ponendo nella (24) $\gamma = e^\rho$, essa diviene

$$\rho'' + \rho'^2 - 6a\rho' - \frac{7}{36} = 0. \tag{33}$$

La (33) è una equazione differenziale di Riccati in ρ', di cui si conosce un integrale particolare, che è $\bar\rho' = \frac{\varphi'}{\varphi}$.

Integrando la (33) si ottiene allora

$$\rho = \log\left[\int \varphi^{-2} e^{\int\left(\frac{7}{36}\frac{\varphi}{\varphi'} - \frac{\varphi''}{\varphi}\right)du} du + c_2\right] + \log\varphi + \log c_3, \tag{34}$$

cioé

$$\gamma = c_3\varphi \int \varphi^{-2} e^{\int\left(\frac{7}{36}\frac{\varphi}{\varphi'} - \frac{\varphi''}{\varphi}\right)du} du + c_2 c_3 \varphi. \tag{35}$$

Le equazioni parametriche della trasformazione si ottengono ora ponendo nelle (31) il valore di a dato dalla (32) e ponendo ψ uguale al valore di γ che si ottiene per $c_2 = 0$, $c_3 = 1$.

Riducendo a forma non omogenea, considerata x_4 come terza coordinata, si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\psi}{\varphi} e^{-\int 2a\,du} \\ y &= \frac{1}{\varphi} e^{\frac{1}{2}u} e^{-v} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \bar x &= \frac{\psi}{\varphi} e^{-\int 2a\,du} \\ \bar y &= \frac{1}{\varphi} e^{-\frac{1}{2}u} e^{v} \end{aligned}\right. \tag{36}$$

da cui si ottiene $\bar x = x$ e $y\bar y = \frac{1}{\varphi^2}$. Poichè φ è una funzione arbitraria di u, si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x} &= x \\ \bar{y} &= \frac{1}{y} f(x) \end{aligned}\right. \tag{37}$$

con $f(x)$ arbitraria [8].

Si osservi che questo tipo di trasformazioni comprende le trasformazioni quadratiche aventi i punti fondamentali distinti. Tali trasformazioni quadratiche sono infatti iperosculabili in ogni coppia regolare con una trasformazione cubica [9].

([8]) Si deve escludere che $f(x)$ sia una forma quadratica a discriminante nullo, in quanto è facile verificare che in questo solo caso le direzioni caratteristiche non sono più tutte distinte. Le trasformazioni (37) si riducono in tal caso a trasformazioni quadratiche con due punti fondamentali coincidenti.

([9]) VILLA, op. cit. in ([1]), II, pag. 118.

Pervenuta alla segreteria dell' U. M. I.
il 1 settembre 1966