
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

DOMINGOS PISANELLI

Funzionali analitici dello spazio $\mathcal{H}(O)$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 21
(1966), n.4, p. 377–384.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_4_377_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Funzionali analitici dello spazio $\mathcal{K}(0)$

DOMINGOS PISANELLI (S. Paolo - Brasile)

Sunto. - Si dà una formola per la rappresentazione dei funzionali n -lineari continui su uno spazio $\mathcal{K}(0_1) \times \dots \times \mathcal{K}(0_n)$; questi vengono caratterizzati da germi di funzioni analitiche in $C0_1 \times \dots \times C0_n$ e si caratterizzano pure i funzionali, analitici secondo Fantappiè, in aperti stellati dello spazio $\mathcal{K}(0)$.

Come si sa, la teoria dei funzionali analitici di LUIGI FANTAPPIÉ, è stata sviluppata specialmente prendendo come spazio base lo spazio $[F]$ dei germi di funzioni analitiche intorno ad un compatto della sfera complessa. In questo lavoro estendiamo la teoria allo spazio $\mathcal{K}(0)$ delle funzioni analitiche in un aperto 0 della sfera complessa, nulle all' ∞ , munito della topologia della convergenza uniforme sulle parti compatte di 0 . In questa direzione esisteva soltanto la formola dei funzionali lineari e continui data da CANDIDO LIMA da SILVA DIAS, LEOPOLDO NACHBIN e A. GROTHENDIECK [1], [2]. Estendiamo — innanzi tutto — quest'ultima ai funzionali n -lineari e continui (proposizione 1). In seguito adattiamo, al caso presente, la formola di maggiorazione dei differenziali di un operatore G -analitico (lemma) che abbiamo ottenuto in [3], con lo scopo di caratterizzare i funzionali analitici in un aperto stellato di $\mathcal{K}(0)$ (proposizione 2).

In un prossimo lavoro estenderemo le proposizioni 1 e 2 quando lo spazio dei valori è uno spazio localmente convesso completo e separato.

Il presente lavoro è stato sviluppato in seminari durante i mesi di Maggio e Giugno del 1965 e ne abbiamo dato una comunicazione al "5° Colóquio Brasileiro de Matemática" che ha avuto luogo a "Poços de Caldas" durante il mese di luglio del 1965. Vogliamo porgere i nostri ringraziamenti al collega ROBERTO ROMANO che si è incaricato di dare una prima redazione al presente lavoro.

NOTAZIONI

C = corpo complesso

S = sfera complessa

0 = aperto di S , $0 \neq \emptyset$, $0 \neq S$

$B(\beta, R)$ = sfera di centro $\beta \in C$ e raggio R . Quando $\beta = \infty$, —
 $B(\beta, R)$ = complementare in S della sfera chiusa
 di centro zero e raggio R .

$\mathcal{H}(0)$ = spazio vettoriale su C delle funzioni analitiche in 0 ,
 nulle all' ∞ , con la topologia della convergenza uni-
 forme sulle parti compatte.

$[F_1 \times \dots \times F_n]$ = spazio vettoriale su C dei germi di funzioni
 analitiche intorno a $F_1 \times \dots \times F_n$,

F_i = compatto di S , $F_i \neq \emptyset$, $F_i \neq S$ ($1 \leq i \leq n$).

Γ = bordo orientato di un compatto

$|\Gamma|$ = lunghezza di Γ .

$\mathcal{H}(0_1) \times \dots \times \mathcal{H}(0_n)$ = prodotto vettoriale topologico degli spazi
 $\mathcal{H}(0_i)$ ($1 \leq i \leq n$).

$|m| = m_1 + \dots = m_n$ quando $m = (m_1, \dots, m_n)$

I - Funzionali lineari e continui in $\mathcal{H}(0)$. (*)

Sia $\Phi: \mathcal{H}(0) \rightarrow C$ lineare e continuo. Si avrà che esiste un numero $M > 0$ ed un compatto $K \subset 0$ in modo che

$$(1) \quad |\Phi(h)| \leq M \leq p_K(h) = \sup_K |h| \leq 1.$$

Si ha

$$(2) \quad |\Phi(h)| = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(x) h(x) dx$$

dove $h \in \mathcal{H}(0)$, u è analitica in CK e nulla all' ∞ , Γ è il bordo di un compatto H , essendo $H \subset 0$, e $\bar{H} \supset K$, orientato in modo a lasciare a sinistra $F = C \setminus 0$.

Si ha

$$(3) \quad u(z) = \sum_{m \geq 0} (\alpha - \beta)^m \Phi \left(\frac{1}{(t - \beta)^{m+1}} \right) \quad \begin{matrix} z \in B(\beta, R) \\ \beta \in 0, R = \text{dist}(\beta, K) \end{matrix}$$

$$(4) \quad u(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{z^{m+1}} \Phi(t^m) \quad \alpha \in B(\infty, R)$$

se $\infty \in 0$ e $R = \sup_K |t|$. Si può supporre $\bar{K} \neq \emptyset$ e di conseguenza $R \neq 0$.

II - Funzionali n -lineari e continui in $\mathcal{H}(0_1) \times \dots \times \mathcal{H}(0_n)$.

Sia $\Phi: \mathcal{H}(0_1) \times \dots \times \mathcal{H}(0_n) \rightarrow C$ n -lineare. Supponiamo che esistano un numero $M > 0$ e compatti $K_i \subset 0_i$, tali che

$$(5) \quad |\Phi(h_1, \dots, h_n)| \leq M \leq p_{K_1}(h_1) \leq 1 \dots p_{K_n}(h_n) \leq 1.$$

(*) [1], pag. 52; [2], pag. 47.

Siano

$$6 \quad \begin{cases} R_{i\infty} = \sup_{K_i} |t| \\ R_i = \text{dist}(F_i, K_i) \quad F_i = C 0_i \end{cases}$$

Sia u la famiglia di funzioni (u_β^p) ($\beta \in F_1 \times \dots \times F_n$) ($0 \leq p \leq n$) dove

$$(7) \quad u_\beta^p(\alpha) = \sum_{|m| \geq 0} \frac{1}{\alpha_1^{m_1+1}} \dots \frac{1}{\alpha_p^{m_p+1}} (\alpha_{p+1} - \beta_{p+1})^{m_1} \dots (\alpha_n - \beta_n)^{m_n} \times \\ \times \Phi \left(t_1^{m_1}, \dots, t_p^{m_p}, \frac{1}{(t_{p+1} - \beta_{p+1})^{m_{p+1}+1}}, \dots, \frac{1}{(t_n - \beta_n)^{m_n+1}} \right)$$

Quando $p=0$ si avrà una serie di potenze ad esponenti non negativi. Quando $p=n$ si avrà una serie di potenze ad esponenti negativi.

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \beta(\beta_j, S_j) \text{ e } S_j = \frac{R_j}{2} \text{ o } S_j = \frac{R_{j\infty}}{2}$$

secondo sia $\beta_j \in 0_j$ complesso o infinito.

Siano $\Omega_j = \bigcup_{\beta_j \in C 0_j} B(\beta_j, S_j)$, e $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$.

In seguito dimostreremo che u è effettivamente una funzione di Ω , cioè i valori locali coincidono nelle parti comuni.

LEMMA - Con le notazioni adottate abbiamo

$$(8) \quad |u(\alpha)| \leq \left(\frac{2}{R}\right)^n M \quad \alpha \in \Omega$$

dove R è il più piccolo dei numeri (6). Difatti si ha da (7)

$$|u_\beta^p(\alpha)| \leq M \frac{1}{|\alpha_1| - R_1} \dots \frac{1}{|u_p| - R_p} \frac{1}{R_{p+1} - |\alpha_{p+1} - \beta_{p+1}|} \dots \\ \dots \frac{1}{R_n - |\alpha_n - \beta_n|} \\ \leq M \frac{2^n}{R_{1\infty} \dots R_{p\infty} R_{p+1} \dots R_n} \leq M \left(\frac{2}{R}\right)^n$$

TEOREMA 1 - Supponiamo Φ n -lineare in $\mathcal{H}(0_1) \times \dots \times \mathcal{H}(0_n)$ e che esistano $M > 0$ e compatti $K_i \subset 0_i$ tali che

$$|\Phi(h_1, \dots, h_n)| \leq M \text{ e } p_{K_1}(h_1) \leq 1, \dots, p_{K_n}(h_n) \leq 1.$$

Esiste allora u analitica, detta indicatrice di Φ in Ω data lo-

calmente da u_β^p e nulla all' ∞ , e

$$(9) \quad \Phi(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} u(\alpha_1, \dots, \alpha_n) h_1(\alpha_1) \dots \\ \dots h_n(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

dove Γ_j è il bordo di un compatto $H_j \subset 0_j$, $\bar{H}_j \supset K_j$, orientato in modo a lasciare a sinistra i punti di F_j .

DIMOSTRAZIONE - Quando $n=1$ si ha la formula (2). Supponiamo che (9) sia vera per $n-1$. Fissato $h_n \in \mathcal{H}(0_n)$ si ha da (8)

$$(10) \quad |\Phi(h_1, \dots, h_n)| \leq M p_{K_n}(h_n) \leq p_{K_1}(h_1) \leq 1 \dots p_{K_{n-1}}(h_{n-1}) \leq 1.$$

Si avrà allora un funzionale $(n-1)$ -lineare e, dall'ipotesi di induzione:

$$(11) \quad \Phi(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n-1}} u(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; h_n) \times \\ \times h_1(\alpha_1) \dots h_{n-1}(\alpha_{n-1}) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}$$

dove $u(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; h_n)$ è una serie del tipo della (7) che definisce un funzionale misto, analitico in $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{n-1}$ e lineare in $h_n \in \mathcal{H}(0_n)$. Dal lemma e da (8) si avrà

$$|u(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; h_n)| \leq \left(\frac{2}{R}\right)^{n-1} M p_{K_n}(h_n), \text{ cioè } u(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, h_n)$$

è pure continuo in $h_n \in \mathcal{H}(0_n)$ per ogni $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. Applicando a questo funzionale il risultato per $n=1$, si avrà:

$$(12) \quad \Phi(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n-1}} \left(\int_{\Gamma_n} v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) h_n(\alpha_n) d\alpha_n \right) \times \\ \times h_1(\alpha_1) \dots h_{n-1}(\alpha_{n-1}) d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}$$

dove $v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ è l'indicatrice di $u(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; h_n)$ in Ω_n . Dalla convergenza assoluta della serie che definisce $v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ si avrà che questa è data localmente da $u_\beta^p(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Da ciò e da (12) risulta la (9).

Risulta pure quello che abbiamo dichiarato al principio, cioè che la famiglia di funzioni u_β^p definisce effettivamente una funzione in Ω (la $v(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$).

TEOREMA 2. - Sia $u(x_1, \dots, x_n)$ analitica nell'aperto $\omega = \omega_1 \times \dots \times \omega_n \supset F_1 \times \dots \times F_n$ e nulla all' ∞ . Allora il funzionale Φ definito da (9) in $\mathcal{H}(0_1) \times \dots \times \mathcal{H}(0_n)$ è n -lineare e continuo. Γ_j sono in questo caso bordi di compatti $H_j \subset 0_j$ tale che $\hat{H}_j \supset C \omega_j$.

DIMOSTRAZIONE - Che Φ così definito sia n -lineare è immediato. Per provare che è continuo basta osservare che:

$$|\Phi(h_1, \dots, h_n)| \leq M p_{H_1}(h_1) \dots p_{H_n}(h_n)$$

dove

$$M = \max_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} |u(x_1, \dots, x_n)| \frac{|\Gamma_1| \dots |\Gamma_n|}{(2\pi)^n}$$

Dal teorema 1 si ha che esiste l'indicatrice v di Φ in un aperto $\Omega \supset F_1 \times \dots \times F_n$. Dimostriamo che $u = v$ in $\omega \cap \Omega$. Infatti, la $v(x_1, \dots, x_n)$ è data da una serie del tipo della (7) dove al posto di $\Phi(\)$ si ha

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} u \quad t_1^{m_1} \dots t_p^{m_p} \frac{1}{(t_{p+1} - \beta_{p+1})^{m_{p+1}+1}} \dots \frac{1}{(t_n - \beta_n)^{m_n+1}} dt_1 \dots dt_n.$$

Come per ipotesi u è analitica in $\omega \cap \Omega$, l'ultima espressione può essere scritta:

$$\frac{1}{(m_1+1)!} \dots \frac{1}{(m_p+1)!} \frac{1}{m_{p+1}!} \dots \frac{1}{m_n!} \left(\frac{\partial^{m_1+\dots+m_{n+p}} u}{\partial x_1^{m_1+1} \dots \partial x_p^{m_p+1} \partial x_{p+1}^{m_{p+1}} \dots \partial x_n^{m_n}} \right) (\infty, \dots, \infty, \beta_{p+1}, \dots, \beta_n).$$

Da ciò è evidente che $u = v$ in $\omega \cap \Omega$. I due teoremi 1 e 2 possono essere riuniti in un unico enunciato:

PROPOSIZIONE 1. - $\Phi: \mathcal{H}(0_1) \times \dots \times \mathcal{H}(0_n) \rightarrow C$ è n -lineare e continuo quando e soltanto quando esiste $u \in [F_1 \times \dots \times F_n]$ tale che:

$$\Phi(h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} u(x_1, \dots, x_n) h_1(x_1) \dots h_n(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

dove Γ_j è il bordo di un compatto $H_j \subset 0_j$, orientato in modo a

lasciare i punti di F_j a sinistra e tale che $CH_1 \times \dots \times CH_n$ sia contenuto nel campo di definizione di un rappresentante di u .

III - Funzionali analitici di $\mathcal{H}(0)$.

TEOREMA 3. - Sia V aperto e stellato in $\mathcal{H}(0)$. $\Phi: V \rightarrow C$ G -analitico e continuo può essere sviluppato secondo la serie

$$(13) \quad \Phi(h) = \Phi(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_n} u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \times \\ \times h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n) dx_1 \dots dx_n$$

dove $u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, detta indicatrice n^{ma} di Φ , è analitica e simmetrica in Ω^n , essendo Ω un aperto conveniente di S , Γ il bordo di un compatto $H \subset 0(\tilde{H} \supset C\Omega)$ orientato in modo a lasciare i punti di $C0$ a sinistra.

DIMOSTRAZIONE - Φ funzionale G -analitico in un aperto stellato V , può essere sviluppato secondo la serie di TAYLOR [3], pg. 26):

$$\Phi(h) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \delta^n \Phi(0, h) \quad h \in V.$$

Siccome Φ è continuo la disuguaglianza fondamentale ([3], pg. 29) ci darà

$$|\delta^n \Phi(0, h_1, \dots, h_n)| \leq n^n \leq p_K(h_1) \leq \delta, \dots, p_K(h_n) \leq \delta, \quad n \geq 1$$

oppure

$$(14) \quad \delta^n |\Phi(0, h_1, \dots, h_n)| \leq n^n \frac{1}{\delta^n} \leq p_K(h_1) \leq 1 \dots p_K(h_n) \leq 1$$

se $|\Phi(h)| \leq 1$ quando $p_K(h) \leq \delta > 0$. Essendo $\delta^n \Phi(0, h_1, \dots, h_n)$ n -lineare e simmetrico, il teorema 1 ci permette di scrivere:

$$\delta^n \Phi(0, h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) h_1(\alpha_1) \dots \\ \dots h_n(\alpha_n) d\alpha_1, \dots, d\alpha_n$$

con $u_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ analitica e simmetrica in $\Omega^n (\Omega = CK)$. Quando $h_1 = h_2 = \dots h_n = h$, si può prendere, come è facile vedere, $\Gamma_1 = \dots = \Gamma_n = \Gamma$ bordo orientato di un compatto $H \subset 0$, $\tilde{H} \supset K$. Siccome $\delta^n \Phi(0, h) = \delta^n \Phi(0, h, \dots, h)$ si avrà la (13).

COROLLARIO - Se Φ è un funzionale analitico secondo FANTAPPIÉ in un aperto stellato di $\mathcal{H}(0)$, allora vale lo sviluppo (13).

DIMOSTRAZIONE - Siccome lo spazio $\mathcal{H}(0)$ è metrizzabile e perciò super-induttivo ([4]) pg. 8), si ha che Φ analitico secondo FANTAPPIÉ è continuo ed evidentemente G -analitico.

PROPOSIZIONE 2 - Esiste una corrispondenza biunivoca tra i funzionali analitici in aperti stellati di $\mathcal{H}(0)$ e le successioni di funzioni $(u_n(x))_{n \geq 0}$ ($u_0 \in C$) analitiche e simmetriche in $\Omega^n(*)$ (nulle all' ∞) essendo Ω aperto in S , tali che:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n!}} < +\infty \quad a_n = \sup_{\Omega^n} |u_n(x)| \quad n \geq 1$$

DIMOSTRAZIONE - Da (4) e dal lemma si ha che $u_n(x)$, indicatrice n^{ma} di Φ in Ω^n , soddisfa alla disuguaglianza:

$$|u_n(x)| \leq n^n \left(\frac{2}{\delta R} \right)^n \quad x \in \Omega^n.$$

Sia

$$a_n = \sup_{\Omega^n} |u_n(x)|. \quad \text{Si avrà}$$

$$a_n \leq n^n \left(\frac{2}{\delta R} \right)^n$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{a_n}{n!}} < +\infty.$$

La simmetria di $u_n(x)$ in Ω^n è conseguenza della simmetria di

$$\delta^n \Phi(0, h_1, \dots, h_n \text{ in } [\mathcal{H}(0)]^n).$$

Viceversa supponiamo che $(u_n(x))_{n \geq 0}$ sia una successione che soddisfa alle condizioni fissate. Costruiamo

$$(15) \quad \Phi(h) = u_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_n} u_n(x_1, \dots, x_n) h(x_1) \dots \dots h(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

con Γ bordo orientato di un compatto $H \subset 0$, $\tilde{H} \supset K$.

(*) Ω può variare col funzionale.

Si ha

$$\left| \frac{1}{n!} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} u_n(z_1, \dots, z_n) h(z_1) \dots h(z_n) dz_1 \dots dz_n \right| \leq \frac{\alpha_n}{n!} \left(\frac{\text{mass } |h|}{2\pi} \right)^n$$

donde la convergenza uniforme di (15) nell'aperto stellato

$$\frac{\text{mass } |h|}{\Gamma} \leq \frac{2\pi\rho}{|\Gamma|} \quad \frac{1}{\rho} > \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{\alpha_n}{n!}}.$$

Si avrà allora l'analiticità, secondo FANTAPPIÈ, di (15).

Dalla simmetria di $u_n(x)$ in Ω^n si avrà ([3], pg. 28, pag. 24):

$$\delta^n \Phi(0, h_1, \dots, h_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma^n} u_n(z_1, \dots, z_n) h_1(z_1) \dots h_n(z_n) dz_1 \dots dz_n$$

e da ciò l'indicatrice n^{ma} di Φ e $u_n(x)$ definiscono lo stesso elemento di $[F_1 \times \dots \times F_n]$ (proposizione 1).

La biunivocità è immediata.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CANDIDO LIMA da SILVA DIAS, *Espaços vectoriais topológicos e sua aplicação aos espaços funcionais analíticos*. Tese de concurso (1951). «Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo», 1952.
- [2] A. GROTHENDIECK, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*. «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Band 192. Heft 1. 1953.
- [3] DOMINGOS PISANELLI, *Contribuição ao estudo dos operadores analíticos*, Tese de livre-docência (1961), «Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo», vol. 10° - Fasc. 1° e 2° 1961.
- [4] JOSÉ SEBASTIÃO e SILVA, *Conceitos de função diferenciável em espaços localmente convexos*. «Publicações do centro de estudos matemáticos de Lisboa», 1957.