Bollettino
Unione Matematica Italiana

Piero Mangani

Sulla quantificazione simultanea nelle algebre cilindriche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.3, p. 302–311.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_302_0>

Sulla quantificazione simultanea nelle algebre cilindriche

PIERO MANGANI (Firenze) (*)

Sunto. - *In questa nota si mostra come sia possibile introdurre, in molti casi, l'operazione di quantificazione simultanea nelle algebre cilindriche, e si fanno alcuni confronti fra le algebre cilindriche e le algebre poliadiche.*

Premessa.

L'algebrizzazione del calcolo dei predicati del primo ordine (con o senza identità) ha condotto allo studio di alcune strutture algebriche, quali le algebre cilindriche e le algebre poliadiche (Cfr. [2] e [5]).

Ricordiamo che nell'ordinario calcolo dei predicati ogni formula contiene un numero *finito* di variabili libere, mentre sono stati studiati recentemente calcoli con espressioni infinitamente lunghe (cfr. [3] e [6]) nei quali certe espressioni contengono un'*infinità* di variabili libere ed è possibile quantificare ogni formula rispetto a *tutte* le variabili dalle quali essa effettivamente dipende. Per l'algebrizzazione di alcuni di tali calcoli le algebre poliadiche appaiono un mezzo più adeguato delle algebre cilindriche.

Nella presente nota, dedicata al confronto fra le algebre cilindriche e le algebre poliadiche sopratutto relativamente alla questione della quantificazione simultanea, mostreremo che il « comportamento » dei due tipi di strutture non è, in generale, troppo diverso. La nostra ricerca sarà di carattere puramente algebrico e quindi rinviamo il lettore, per ogni riferimento alle connessioni fra algebra e logica, ai volumi di HALMOS e di KARP ed alla memoria di HENKIN e TARSKI.

Ricordiamo ora alcuni concetti che saranno utili nel seguito:

Un'*algebra cilindrica di dimensione* α (brevemente AC_α) è un sistema

$$< A,\ C_k,\ d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C. N. R. per l'anno 1966/67 (Gruppo n. 37).

in cui:

1) α è un ordinale > 0

2) A è un'algebra di BOOLE ($A = < \mathfrak{A}, +, \cdot, ', 0, 1 >$) e $d_{k\lambda} \in A$, per ogni $k, \lambda < \alpha$.

3) C_k è, per ogni $k < \alpha$, un quantore su A.

4) $C_k C_\lambda = C_\lambda C_k$.

5) $d_{kk} = 1$.

6) Se $k, \lambda, \mu < \alpha$ e $k, \lambda \neq \mu$ allora $d_{k\lambda} = C_\mu(d_{k\mu} \cdot d_{\mu\lambda})$.

7) Se $k, \lambda < \alpha$ e $k \neq \lambda$ allora, per ogni $x \in A$, $C_k(d_{k\lambda} \cdot x) \cdot C_k(d_{k\lambda} \cdot \cdot x') = 0$.

Se $x \in A$, per «dimensione» di x intendiamo l'insieme Δx di tutti gli ordinali $k (< \alpha)$ tali che $C_k x \neq x$.

Un'algebra cilindrica si dirà «localmente finita» se, per ogni $x \in A$, Δx risulta finito.

Un'*algebra poliadica di grado* μ (brevemente AP_μ) è un sistema

$$< A, I, S, C >$$

in cui:

1) A è un'algebra di BOOLE ($A = < \mathfrak{A}, +, \cdot, ', 0, 1 >$) ed I è un insieme non vuoto di cardinale μ.

2) S è un'applicazione da I^I all'insieme degli endomorfismi di A e C è una applicazione da $\mathcal{S}(I)$ all'insieme dei quantori su A.

3) Se δ è l'identità su I allora $S(\delta)$ è l'identità su A.

4) Se $\sigma, \tau \in I^I$ allora $S(\sigma\tau) = S(\sigma)S(\tau)$.

5) $C(\emptyset)$ è il quantore discreto su A.

6) $C(J \cup K) = C(J)C(K)$, se $J, K \subseteq I$.

7) Se $\sigma, \tau \in I^I$ e coincidono su $I - J (J \subseteq I)$ allora $S(\sigma)C(J) = = S(\tau)C(J)$.

8) Se $\sigma \in I^I$ ed è biiettiva su $\sigma^{-1}J (J \subseteq I)$ allora $C(J)S(\sigma) = = S(\sigma)C(\sigma^{-1}J)$.

(È utile tenere presente che, considerando I come insieme di «variabili individuali», $S(\sigma)$, con $\sigma \in I^I$, può essere pensata come operazione di *sostituzione simultanea* e $C(J)$, con $J \subseteq I$, come operazione di *quantificazione simultanea* rispetto alle variabili di J).

Se $< A, I, S, C >$ è un'algebra poliadica, un elemento $x \in A$ si dice «indipendente» da $J (J \subseteq I)$ allorchè $C(J)x = x$.

$< A, I, S, C >$ si dice «localmente finita» allorchè, per ogni $x \in A$, esiste un sottoinsieme cofinito J di I tale che x è indipendente da J.

Notiamo che sia le algebre poliadiche sia le algebre cilindriche associate ai sistemi classici di calcolo dei predicati sono tutte localmente finite.

La struttura di algebra poliadica può essere arricchita in modo da servire anche per l'algebrizzazione del calcolo dei predicati con identità. Per questo introduciamo il concetto di «predicato» su di una data algebra poliadica: se $< A, I, S, C >$ è un'algebra poliadica ed n è un'ordinale finito (> 0), un'applicazione P di I^n in A tale che, se $\sigma \in I^I$, $S(\sigma)P(i_1, \ldots, i_n) = P(\sigma i_1, \ldots, \sigma i_n)$ si chiama «predicato n-ario» su $< A, I, S, C >$, Un predicato binario P si dice «sostitutivo» allorchè: $x \cdot P(i, j) \leq S(i/j)x$ (1) ($i, j \in I$; $x \in A$).

Un predicato binario P si dice «riflessivo» allorchè: $P(i, i) = 1$, per ogni $i \in I$

Un predicato binario riflessivo e sostitutivo si chiama «eguaglianza». È noto che due eguaglianze sulla stessa algebra poliadica coincidono.

Per *«algebra poliadica (di grado μ) con eguaglianza»* intendiamo ora un sistema $< A, I, S, C, E >$ tale che:

1) $< A, I, S, C >$ è una AP_μ.

2) E è un'eguaglianza su $< A, I, S, C >$.

Le più appariscenti differenze fra le algebre cilindriche di dimensione α e le algebre poliadiche di grado μ (con $\text{Card}\, \alpha = \mu$) con eguaglianza, stanno nel fatto che, mentre un'algebra poliadica possiede le operazioni di sostituzione e di quantificazione simultanee rispetto ad ogni insieme di variabili, un'algebra cilindrica non è dotata di operazioni di sostituzione (2) e la quantificazione è definita soltanto rispetto a ciascuna variabile.

(È facile tuttavia controllare che, se $< A. I, S, C, E >$ è una AP_μ con eguaglianza, ordinati gli elementi di I in una sequenza di tipo ordinale α la struttura $< A, C_k, d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$, in cui $C_k = C(\{i_k\})$ e $d_{k\lambda} = E(i_k, i_\lambda)$, risulta un'algebra cilindrica di dimensione α).

(1) Se σ è un «rimpiazzamento» su I (cioè esistono due elementi $i, j \in I$ tali che $\sigma i = j$. $\sigma k = k$ se $k \neq i$) indicheremo l'endomorfismo $S(\sigma)$ con il simbolo $S(i/j)$.

(2) È noto, tuttavia, che in una AC_α si può introdurre, per definizione, una operazione di sostituzione corrispondente al «rimpiazzamento»: Cfr., ad esempio, HENKIN [4].

Una conseguenza notevole delle differenze sopra accennate è la seguente: *ogni algebra poliadica è semisemplice mentre non ogni algebra cilindrica lo è* (3).

È noto tuttavia che, nel caso che le algebre in questione siano *localmente finite* (*di dimensione e di grado infinito*), esse risultano sostanzialmente equivalenti, poichè anche ogni algebra cilindrica può essere dotata di una struttura di algebra poliadica con eguaglianza. Ciò significa che i due tipi di algebre sono ugualmente adeguati per l'algebrizzazione dei calcoli classici dei predicati.

Nella presente nota ci proponiamo di discutere più in generale la questione del confronto fra le algebre cilindriche e le algebre poliadiche, sopratutto riguardo alla questione della quantificazione simultanea.

1. – Il fatto che in una AC_α si chieda la permutabilità di due (e quindi di un numero finito) di quantori risulta naturale da un punto di vista logico ed ha come conseguenza che, se $k_1, \ldots, k_n$ sono ordinali $< \alpha$, l'applicazione $\overline{C}$ di A in sè definita da $\overline{C}x = C_{k_1} C_{k_2} \ldots C_{k_n} x$ risulta un *quantore* su A, di codominio $\bigcap_{1 \leq i \leq n} C_{k_i}(A)$. Ciò mostra come, in una qualsiasi AC_α, sia possibile introdurre l'operazione di quantificazione simultanea rispetto ad un qualsiasi numero *finito* di variabili.

Prima di iniziare il nostro studio vogliamo fare alcune osservazioni per meglio sottolineare il significato della condizione di permutabilità di due quantori in un'algebra cilindrica.

Sia, per questo, $< A, C_1, C_2 >$ una terna in cui: A è un'algebra di Boole e C_1, C_2 sono quantori su A. È facile controllare che, in generale, $C_1 C_2$ e $C_2 C_1$ non sono quantori su A (si potrebbe agevolmente provare che essi risultano sempre operatori di tipo V_{DD}: cfr. [8]), pur esistendo, se $C_1(A) \cap C_2(A)$ è relativamente completa in A, un quantore su A associato appunto a $C_1(A) \cap C_2(A)$.

Ora si ha: *$C_1 C_2$ e $C_2 C_1$ risultano quantori su A* (*se e*) *solo se C_1 e C_2 sono permutabili.*

Se C_1 e C_2 sono permutabili si controlla con facili calcoli che $C_1 C_2 (= C_2 C_1)$ è un quantore su A, di codominio $C_1(A) \cap C_2(A)$.

Siano, viceversa, $C_1 C_2$ e $C_2 C_1$ quantori su A; si ha allora: $C_1 C_2 x = C_1 C_2 C_1 C_2 x \geq C_2 C_1 C_2 x \geq C_2 C_1 x$, per ogni $x \in A$; analogamente

(3) Dire che un'algebra cilindrica (poliadica) è semisemplice significherà per noi che l'intersezione di tutti gli ideali cilindrici (poliadici) massimali è $\{0\}$. Tale significato coincide tuttavia, per cose ben note, con l'altro per cui semisemplice equivale, per un'algebra, ad essere prodotto sottodiretto di algebre semplici.

$C_2C_1x \geq C_1C_2x$, per ogni $x \in A$ e perciò $C_1C_2 = C_2C_1$. Ovviamente, se C_1C_2 e C_2C_1 sono quantori su A, essi hanno per codominio $C_1(A) \cap C_2(A)$.

Fatte queste osservazioni, passiamo a discutere le algebre cilindriche localmente finite prima di studiare, nei successivi paragrafi, il caso generale.

Sia $< A,\ C_k,\ d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ una AC_α localmente finita, e D un insieme di ordinali $< \alpha$. Consideriamo l'insieme $\mathcal{C}_D$ di tutti gli elementi x di A tali che $C_\lambda x = x$ per *ogni* $\lambda \in D$. Valgono i seguenti risultati:

i) $\mathcal{C}_D = \bigcap_{\lambda \in D} C_\lambda(A)$ (e quindi $\mathcal{C}_D$ è una sottoalgebra di A).

ii) $\mathcal{C}_D$ è relativamente completa in A.

La verifica di i è immediata. Per provare ii si osservi dapprima che, essendo la data algebra cilindrica localmente finita. Δx è finito per ogni $x \in A$ e tale è $\Delta x \cap D$. Sia ora $x \in A$ ed $I = \{z : z \in \mathcal{C}_D,\ z \geq x\}$. Proviamo che I ammette minimo, precisamente si ha: $\min I = C_{\nu_1}C_{\nu_2} \dots C_{\nu_\rho}x$, dove $\{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\rho\} = \Delta x \cap D$. [4] Infatti $C_{\nu_1}C_{\nu_2} \dots C_{\nu_\rho}x \in I$ ed inoltre, se $z \in I$, si ha $C_{\nu_1}C_{\nu_2} \dots C_{\nu_\rho}z \geq C_{\nu_1}C_{\nu_2} \dots C_{\nu_\rho}x$, cioè $z \geq C_{\nu_1}C_{\nu_2} \dots C_{\nu_\rho}x$.

$\mathcal{C}_D$ definisce quindi su A un quantore C_D che possiamo considerare come operazione di quantificazione simultanea rispetto alle variabili di D.

$\mathcal{C}_D$ sarà chiamato *D-centro* della data algebra cilindrica. Se D coincide con l'insieme di *tutti* gli ordinali $< \alpha$, $\mathcal{C}_D$ si indicherà con $\mathcal{C}$ e si chiamerà il *centro* di $< A,\ C_k,\ d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$. Se C indica il quantore su A associato a $\mathcal{C}$, la coppia $< A,\ C >$ è ovviamente un'algebra monadica e $C(A)$ risulta l'insieme di tutti gli elementi $x \in A$ per i quali $\Delta x = \emptyset$.

Da quanto osservato sopra seguono, per le algebre cilindriche localmente finite, queste importanti proprietà:

a) Sia $< A,\ C_k,\ d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ una AC_α (localmente finita): allora ogni suo ideale cilindrico è un ideale monadico di $< A,\ C >$ e viceversa.

b) Un'algebra cilindrica localmente finita è semplice *se e solo se* il suo centro è l'algebra di BOOLE semplice.

c) *Ogni* algebra cilindrica localmente finita è *semisemplice*.

(Tralasciamo, per la loro semplicità, le dimostrazioni di *a, b, c*).

[4] La permutabilità di un qualunque numero finito di quantori dell'algebra garantisce che $C_{\nu_1}C_{\nu_2} \dots C_{\nu_\rho}x$ coincide con $C_{\nu_{i_1}}C_{\nu_{i_2}} \dots C_{\nu_{i_\rho}}x$, dove $(i_1, i_2, \dots, i_\rho)$ è una qualunque permutazione di $(1, 2, \dots, \rho)$.

Poichè sappiamo che ogni algebra cilindrica *semplice*, *localmente finita, di dimensione infinita* è rappresentabile come *algebra cilindrica di insiemi* (cfr. [4]) segue da c che *ogni* algebra cilindrica *localmente finita e di dimensione infinita* è (isomorfa ad un) prodotto sottodiretto di algebre cilindriche di insiemi e questo, com'è noto, equivale al teorema di completezza per i calcoli classici dei predicati del primo ordine. Poichè, inoltre, in un'algebra cilindrica localmente finita di dimensione infinita, ogni elemento $x \in A$ dipende «effettivamente» soltanto da un numero finito di variabili, si può dimostrare (cfr. [1]) che una tale algebra può essere dotata della *operazione di sostituzione simultanea.* Si può quindi affermare, efficacemente anche se non in modo rigoroso, che non c'è nessuna differenza sostanziale fra le algebre poliadiche con eguaglianza localmente finite di grado infinito e le algebre cilindriche di dimensione infinita e localmente finite: come già abbiamo osservato ambedue i tipi di strutture sono egualmente adeguati per l'algebrizzazione dei calcoli classici dei predicati del primo ordine.

Sappiamo, invece, che non ogni algebra cilindrica di dimensione finita è rappresentabile. In queste algebre *non* è possibile, in generale, introdurre l'operazione di sostituzione simultanea poichè alcuni elementi possono dipendere «effettivamente» da *tutte* le variabili. Per ulteriori discussioni in proposito rinviamo alla memoria di Henkin e Tarski ([5]).

2. - Se $<A, C_k, d_{k\lambda}>_{k,\lambda<\alpha}$ è un'algebra cilindrica *non* localmente finita, le nozioni di centro e di D-centro (con D insieme di ordinali $<\alpha$) si possono evidentemente ancora introdurre (si ha ancora, ovviamente, per ogni D, $\mathfrak{C}_D = \bigcap_{\lambda \in D} C_\lambda(A)$).

Tuttavia non sarà più, in generale, possibile introdurre operatori di quantificazione simultanea rispetto ad *ogni* insieme D, poichè $\mathfrak{C}_D$ non risulterà, per ogni D, relativamente completa in A.

Supponiamo ora che A sia un'algebra di Boole *completa.* In tal caso ogni D-centro risulterà relativamente completo in A (essendo una sottoalgebra completa regolare di A) e definirà quindi un quantore C_D su A. Si ha inoltre il seguente:

Teorema 1. – *Ordiniamo gli elementi di D in una sequenza $<k_i>_{i<\rho}$ (di tipo ordinale ρ) e definiamo poi la seguente sequenza di applicazioni di A in sè*:

$$\left.\begin{array}{ll} C^{k_0}x = C_{k_0}x. & \\ C^{k_i}x = C_{k_i}(C^{k_{i-1}}x), & \textit{se } i \textit{ è un'ordinale successore} \\ C^{k_i}x = C_{k_i}(\overset{A}{\bigvee_{j<i}} C^{k_j}x), & \textit{se } i \textit{ è un ordinale limite.} \end{array}\right\} x \in A.$$

Se poniamo $C^*x = \bigvee_{i<\rho}^{A} C^{k_i}x$, *per ogni* $x \in A$, *si ha allora* $C^* = C_D$.

Noi proveremo, per dimostrare il teorema, che C^*x è, per ogni $x \in A$, il minimo di tutti gli elementi $z \in \mathcal{C}_D$ tali che $z \geq x$, da cui seguirà sia che $C^* = C_D$ sia che C^* non dipende dall'ordinamento scelto per gli elementi di D.

(È facile tuttavia controllare direttamente, tenendo conto della permutabilità di due qualsiasi quantori C_k, C_λ della data algebra cilindrica, che C^* è indipendente dall'ordinamento scelto per gli elementi di D).

Proviamo quindi, in primo luogo, che $C^*x \in \mathcal{C}_D$. per ogni $x \in A$. Basterà verificare che $C_k(C^*x) = C^*x$, qualunque sia $k \in D$: ciò si controlla facilmente tenendo conto della definizione di C^* e delle proprietà di un quantore.

Ovviamente $C^*x \geq x$; resta quindi da provare che per ogni $z \in \mathcal{C}_D$ tale che $z \geq x$, si ha $z \geq C^*x$. Sia $z \in \mathcal{C}_D$ e $z \geq x$: ovviamente $C^{k_i}z \geq C^{k_i}x$, per ogni $i < \rho$, da cui, tenendo conto che $C_k z = z$ per ogni $k \in D$, segue $z \geq C^{k_i}x$ (per ogni $i < \rho$) ed infine $z \geq \bigvee_{i<\rho}^{A} C^{k_i}x = C^*x$. Il teorema è così provato.

Vale anche il seguente:

TEOREMA 2. - *Se D e D' sono insiemi di ordinali $< \alpha$, allora* $C_{D \cup D'} = C_D C_{D'}$.

Tale teorema è un'ovvia conseguenza del teorema 1.

Quanto abbiamo visto permette di enunciare la seguente proposizione:

In ogni algebra cilindrica completa $< A, C_k, d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ si possono introdurre gli operatori di quantificazione simultanea rispetto ad ogni insieme D di variabili; la struttura $< A, I, C, E >$ in cui I è l'insieme di tutti gli ordinali $< \alpha$, C è l'applicazione da $\mathcal{S}(I)$ all'insieme dei quantori su A definita da $C(D) = C_D (D \subseteq I)$ ed E è l'applicazione di I^2 in I definita da $E(k, \lambda) = d_{k\lambda}$, risulta un'*algebra di quantificazione dotata di elementi* « *diagonali* ».

Osserviamo ora che i risultati ottenuti possono essere generalizzati considerando algebre cilindriche $< A, C_k, d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ tali che A sia un'algebra di BOOLE Card α-completa [5]. È quasi immediato infatti controllare che in questa ipotesi i teoremi 1 e 2 continuano a valere: queste algebre possono quindi essere dotate di tutte le

[5] Un'algebra di BOOLE A si dice μ-completa (con μ cardinale infinito) allorchè esiste il supremo di ogni famiglia F di elementi di A tale che Card $F = \mu$.

operazioni di quantificazione simultanea.

Passiamo ora a discutere il caso generale.

Sia $< A, C_k, d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ un'algebra cilindrica. Sappiamo (Cfr. [4]) che essa può essere «immersa» in un'algebra cilindrica $< \bar{A}, \bar{C}_k, \bar{d}_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ *completa e atomica,* nella quale saranno dunque definibili le operazioni di quantificazione simultanea. Non è tuttavia tale immersione che qui ci interessa, in quanto essa, per così dire, «disturba» al massimo l'algebra di partenza (l'algebra di BOOLE A non risulta, ad esempio, in generale, sottoalgebra regolare di $\bar{A}$),

Noi considereremo invece un'altra immersione di $< A, C_k, d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$. Si ha infatti il seguente:

TEOREMA 3. - *Sia $\mathfrak{A} = < A, C_k, d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ un'algebra cilindrica. Esistono allora un'algebra cilindrica completa $\bar{\mathfrak{A}} = < \bar{A}, \bar{C}_k, \bar{d}_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ e un monomorfismo φ di $\mathfrak{A}$ in $\bar{\mathfrak{A}}$ tali che:*

i) *$\bar{A}$ risulta estensione minimale di $\varphi(A)$,* cioè *$\varphi(A)$ è densa (e quindi regolare) in $\bar{A}$.*

ii) *Per ogni monomorfismo regolare ψ di $\mathfrak{A}$ in un'algebra cilindrica completa $\mathfrak{A}^*$ esiste un monomorfismo ρ di $\bar{\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{A}^*$ tale che $\psi = \rho\varphi$.*

Per dimostrare il teorema ricordiamo anzitutto che, se A è un'algebra di BOOLE, esiste sempre una coppia $(\bar{A}, \varphi)$ tale che $\bar{A}$ è un'algebra di BOOLE completa, φ è un monomofismo di A in $\bar{A}$ e $\varphi(A)$ è una sottoalgebra densa di $\bar{A}$.

Una tale coppia (unica, a meno di isomorfismi) si chiama «complezione» di A.

Sia ora $\mathfrak{A} = < A, C_k, d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ la data algebra cilindrica e $(\bar{A}, \varphi)$ una complezione di A. È ovvio che $< \varphi(A), \varphi C_k, \varphi d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ risulta un'algebra cilindrica (isomorfa alla data). È noto d'altronde (cfr. [7]) che ogni quantore su $\varphi(A)$ può essere «esteso» *in uno ed in un solo modo* ad un quantore su $\bar{A}$. Sia allora $\bar{C}_k$ l'estensione ad $\bar{A}$ di $\varphi C_k (k < \alpha)$: con facili calcoli si prova che, posto $\varphi d_{k\lambda} = \bar{d}_{k\lambda}$, la struttura $\bar{\mathfrak{A}} = < \bar{A}, \bar{C}_k, \bar{d}_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ risulta un'algebra cilindrica (ovviamente φ risulta un monomorfismo di $\mathfrak{A}$ in $\bar{\mathfrak{A}}$).

Sia ora ψ un monomorfismo regolare di $\mathfrak{A}$ in un'algebra cilindrica completa $\mathfrak{A}^* = < A^*, C_k^*, d_{k\lambda}^* >_{k,\lambda<\alpha}$; ψ è anche un monomorfismo (regolare) di A in A^* e quindi (tenendo conto del fatto che $(\bar{A}, \varphi)$ è una complezione di A) esisterà un monomorfismo regolare) ρ di $\bar{A}$ in A^* tale che $\psi = \rho\varphi$. Mostriamo ora che ρ è anche un monomorfismo dell'algebra cilindrica $\bar{\mathfrak{A}}$ nell'algebra cilindrica $\mathfrak{A}^*$.

Si ha infatti:

$$\rho \bar{d}_{k\lambda} = \rho(\varphi d_{k\lambda}) = \psi d_{k\lambda} = d^*_{k\lambda}(k,\ \lambda < \alpha).$$

Se $z \in \bar{A}$ si ha:

$$z = \bigvee_{\varphi x \leq z}^{\bar{A}} \varphi x,$$

da cui

$$\rho \bar{C}_k z = \rho \bar{C}_k(\bigvee_{\varphi x \leq z}^{\bar{A}} \varphi x) = \rho(\bigvee_{\varphi x \leq z}^{\bar{A}} \bar{C}_k \varphi x) = \rho(\bigvee_{\varphi x \leq z}^{\bar{A}} \varphi C_k x) =$$

$$= \bigvee_{\varphi x \leq z}^{A^*} \rho\varphi C_k x = \bigvee_{\varphi x \leq z}^{A^*} C^*_k \psi x = C^*_k \rho z.$$

Il teorema è così provato.

La coppia $(\bar{\mathfrak{A}}, \varphi)$ sarà chiamata «complezione dell'algebra cilindrica $\mathfrak{A}$».

È immediato che la complezione di un'algebra cilindrica è determinata a meno di isomorfismi.

Ricordando ora i teoremi 1 e 2 si ha che, se $\mathfrak{A}$ è un'algebra cilindrica ed $(\bar{\mathfrak{A}}, \varphi)$ la sua complezione, $\bar{\mathfrak{A}}$ può essere dotata della struttura di un'algebra di quantificazione.

Possiamo dunque enunciare il seguente:

COROLLARIO 1 – *Ogni algebra cilindrica può essere immersa «regolarmente» in un'algebra cilindrica nella quale sono definibili tutte le operazioni di quantificazione simultanea.*

In modo meno preciso ma più espressivo possiamo dire che l'introduzione dei supremi (e quindi degli infimi) delle famiglie infinite di elementi di un'algebra cilindrica $\mathfrak{A}$ (da un punto di vista logico: l'introduzione delle operazioni di «congiunzione» e «disgiunzione» infinite) permette di *definire* tutte le operazioni di quantificazione simultanea.

Può essere di un qualche interesse osservare che, se $\mathfrak{A}$ è una AC_α localmente finita ed $(\bar{\mathfrak{A}}, \varphi)$ è la sua complezione [6], indicando, per ogni insieme D di ordinali $< \alpha$, con $\bar{C}_D$ l'operatore di quantificazione simultanea definibile in $\bar{\mathfrak{A}}$ si ha $\bar{C}_D \varphi x = \varphi C_D x$, per ogni $x \in \mathfrak{A}$ (C_D definito sull'algebra localmente finita come al paragrafo 1).

Per concludere osserviamo che, se $\mathfrak{A} = < A,\ C_k,\ d_{k\lambda} >_{k,\lambda<\alpha}$ è un'algebra cilindrica completa o Card α–completa (e quindi in essa sono definibili le operazioni di quantificazione simultanea rispetto

[6] Si osserverà che, in generale, $\bar{\mathfrak{A}}$ non risulterà localmente finita.

ad ogni insieme D di ordinali $< \alpha$), non necessariamente ogni ideale cilindrico di $\mathfrak{A}$ risulterà chiuso rispetto ad ogni quantore C_D (a tale ideale dovranno appartenere, per questo, i supremi di certe famiglie infinite di suoi elementi). Tuttavia un ideale cilindrico completo o, più in generale, Card α–completo è chiuso rispetto ad ogni C_D. Il quoziente di $\mathfrak{A}$ rispetto ad un tale ideale, risultando un'algebra cilindrica completa o Card α–completa, si può dotare di tutte le operazioni di quantificazione simultanea e queste risultano le operazioni «quoziente» dei quantori C_D rispetto al dato ideale; più precisamente, indicato con J un ideale completo (Card α–completo) di $\mathfrak{A}$, si ha che: $\mathfrak{A}/J$ è un'algebra cilindrica completa (Card α–completa) e, se denotiamo con σ l'epimorfismo canonico di $\mathfrak{A}$ su $\mathfrak{A}/J$ e (per ogni insieme D di ordinali $< \alpha$) con $\overline{C}_D$ le operazioni di quantificazione simultanea definibili in $\mathfrak{A}/J$, risulta $\sigma C_D x = \overline{C}_D \sigma x$, per ogni $x \in \mathfrak{A}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. A. GALLER, *Cylindric and polyadic algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 8(1957).

[2] P. R. HALMOS, *Algebraic Logic*, New York 1962.

[3] L. HENKIN, *Some remarks on infinitely long formulas*, in Infinitistic Metods, Warsaw 1959.

[4] — —, *Cylindric algebras*, (Lectures presented at the Seminar of the 1961 Can. Math. Congr. (litografate)).

[5] L. HENKIN-A. TARSKI, *Cylindric algebras*, Proc. of Symposia in pure math. Vol. II (Lattice theory), 1959.

[6] C. R. KARP, *Languages with expressions of infinite length*, Amsterdam 1964.

[7] P. MANGANI, *Alcune applicazioni del concetto di « stabilizzante » al problema dell'estensione di un quantore*, Atti Acc. Scienze di Torino, Vol. 99 (1964/1965).

[8] M. SERVI, *Sulla meno fine topologia ottenuta per estensione da una infra-topologia generalizzata*, Rend. Sem. Mat. Un. e Politecn. Torino, Vol. 23.

[9] R. SIKORSKI, *Boolean algebras*, Berlin 1964 (II ediziene).

Pervenuto alla Segreteria dell' U. M. I.
il 7 luglio 1966