Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sergio Spagnolo

Alcune osservazioni su certe famiglie di limitati di uno spazio lineare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.3, p. 285–291.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_285_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Alcune osservazioni su certe famiglie di limitati di uno spazio lineare

SERGIO SPAGNOLO (*)

Sunto. *Si danno alcuni esempi di coppie* (X, Y) *di spazi lineari in dualità tali che esistono delle bornologie loc. convesse su* X *di duale* Y, *senza che ve ne sia una più fine di tutte. Tali esempi rispondono in parte ad una questione suggerita in* [4], *pag.* 39.

1. - Richiami.

Nel seguito, X indicherà sempre uno spazio lineare di dimensione infinita sul corpo $\boldsymbol{K}$ dei numeri reali o complessi e X^* il suo duale algebrico. Una parte non vuota di X si chiama *disco* se, contenendo due vettori x e y, contiene anche il vettore $\lambda x + \mu y$, con λ e μ numeri tali che $|\lambda| + |\mu| \leq 1$; per ogni parte A di X esiste il minimo disco di X che contiene A, esso sarà indicato $D(A)$.

Si chiamerà *bornologia loc. convessa* su X ogni famiglia β di parti di X verificante le seguenti proprietà:

(b_1) $A \in \beta,\ B \in \beta \Rightarrow A \bigcup B \in \beta$

(b_2) $A \in \beta,\ B \subseteq A \Rightarrow B \in \beta$

(b_3) $A \in \beta,\ \lambda \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \lambda A \in \beta$

(b_4) $x \in X \Rightarrow \{x\} \in \beta$

(b_5) $A \in \beta \Rightarrow D(A) \in \beta$

β si dirà poi *separata* se verifica inoltre la

(b_6) Se W è un sottospazio di X e $W \in \beta \Rightarrow W = \{0\}$.

Ogni bornologia loc. convessa β su X individua il sottospazio di X^*:

$$X_\beta^{\#} = \{x' \in X^* : x' \text{ è limitato su ogni } A \in \beta\}$$

cioè l'insieme dei funzionali lineari β-limitati, detto il *duale bornologico* di (X, β) o anche il *duale* di β.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca per la Matematica del C. N. R. nell'anno 1965-1966.

Si dice che una bornologia loc. convessa β_1 su X è *più fine* di un'altra β_2 se $\beta_1 \subseteq \beta_2$; se inoltre $\beta_1 \neq \beta_2$ si dice che la β_1 è *strettamente più fine* della β_2.

Si noti che $\beta_1 \subseteq \beta_2$ implica $X^{\#}_{\beta_1} \subseteq X^{\#}_{\beta_2}$.

Su X esiste la più fine bornologia loc. convessa, si tratta della famiglia $\beta_0(X)$ di tutte le parti di X contenute nell'involucro discato di qualche parte finita; essa sarà chiamata la *bornologia finita* su X, il suo duale è tutto X^*.

In corrispondenza ad ogni sottospazio Y di X si introduce un'altra bornologia:

$$\beta_Y = \{ A \subseteq X: \quad \text{ogni} \quad y' \in Y \quad \text{è limitato su} \quad A \}$$

detta la *bornologia debole* (su X) *relativa ad* Y.

Il suo duale contiene certamente Y, ma può non coincidere con esso.

Riportiamo il *Teorema di Mackey* sulle topologie loc. convesse in dualità:

«Sia Y un sottospazio di X^* e $T(X; Y)$ la classe di tutte le topologie loc. convesse su X di duale Y. Allora si ha

(i) $T(X; Y)$ non è vuota;

(ii) $T(X; Y)$ ha un minimo e un massimo;

(iii) la famiglia dei limitati di ogni $\tau \in T(X; Y)$ è β_Y.»

Il problema di caratterizzare la classe $B(X; Y)$ di tutte le bornologie loc. convesse su X di dato duale Y presenta invece maggiori difficoltà.

Quello che si può verificare facilmente è che

(i) $B(X; Y)$ è non-vuota se e solo se β_Y ha per duale Y

(ii) Se $B(X; Y)$ è non-vuota, β_Y è la meno fine fra tutte le $\beta \in B(X; Y)$.

Un caso in cui esiste anche la più fine, fra tutte le $\beta \in B(X; Y)$, è quello in cui $Y = X^*$: infatti $B(X; X^*)$ consta della sola bornologia finita $\beta_0(X)$.

Alla questione se per ogni Y esista una più fine $\beta \in B(X; Y)$ si risponderà negativamente.

2. - Bornologie cartesiane.

Sia $\boldsymbol{E} = \{ e_i \}_{i \in I}$ una base di Hamel dello spazio lineare X (di dimensione infinita su $\boldsymbol{K}$) e sia $\{ f_i \}_{i \in I}$ l'insieme dei funzionali su X definiti da $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ per $i \in I$, $j \in I$.

Se $\psi : I \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ è una funzione reale non-negativa definita su I, chiameremo ***E-parallelepipedo*** di lati $\psi(i)$ il sottoinsieme di X:

$$P(\psi) = \{ x \in X : | f_i(x) | \leq \psi(i), \ \forall i \in I \}$$

Per i parallelepipedi valgono le seguenti proprietà, di facile verifica:

(i) $P(\psi) \subseteq P(\varphi)$ se e solo se $\psi \leq \varphi$

(ii) $\bigcap_r P(\psi_r) = P(\inf \{ \psi_r \})$

(iii) $P(\rho\psi) = \rho P(\psi)$ $\qquad (\rho \geq 0)$

(iv) $P(\psi) \bigcup P(\varphi) \subseteq P(\max \{ \psi ; \varphi \})$

Dalla (ii) segue che si può associare ad ogni parte A di X su cui gli f_i sono limitati il minimo $\boldsymbol{E}$-parallelepido contenente A, e cioè l'insieme

$$P(A) = P(\psi_A) \quad \text{ove} \quad \psi_A(i) = \sup_{x \in A} | f_i(x) |$$

Sia ora β una bornologia loc. convessa su X; diremo che β è ***E-cartesiana*** se possiede una base costituita da $\boldsymbol{E}$-parallelepipedi, cioè se $A \in \beta$ implica $P(A) \in \beta$.

In ogni caso se gli f_i sono β-limitati si può costruire la più fine bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana su X che sia meno fine della β, precisamente:

$$\beta_\rho = \{ A \subseteq X : \exists B \in \beta \ \text{ per cui } \ A \subseteq P(B) \}$$

Non è detto che β e β_ρ abbiano lo stesso duale. Una bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana è individuata dalla famiglia dei suoi parallelepipedi e quindi dalla famiglia delle funzioni non-negative su I che ne rappresentano i lati. Ad esempio la bornologia finita, $\beta_0(X)$, che è ovviamente $\boldsymbol{E}$-cartesiana, è rappresentata dalla famiglia Ψ_0 delle funzioni su I non-negative e quasi-ovunque (1) nulle.

Viceversa, una famiglia Ψ di funzioni reali non-negative definite su I rappresenta (nel senso suddetto) una qualche bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana, che chiameremo β_Ψ, se e solo se

(c_1) $\psi \in \Psi, \ \varphi \in \Psi \Rightarrow \max \{ \psi, \varphi \} \in \Psi$

(c_2) $\psi \in \Psi, \ \varphi \leq \psi \Rightarrow \varphi \in \Psi$

(c_3) $\psi \in \Psi, \ \rho \geq 0 \Rightarrow \rho\psi \in \Psi$

(c_4) $\Psi_0 \subseteq \Psi$.

(1) Qui e nel seguito l'avverbio «quasi» sta ad indicare l'eventuale esclusione di numero finito di casi.

Osserviamo inoltre che $\beta_{\Psi_1} \subseteq \beta_{\Psi_2}$ se e solo se $\Psi_1 \subseteq \Psi_2$.

La ricerca dei funzionali lineari limitati su di una bornologia cartesiana si può eseguire con l'ausilio del seguente

LEMMA. – « Sia $P(\psi)$ un $\boldsymbol{E}$-parallelepipedo di X, $x' \in X^*$.

Allora x' è illimitato su $P(\psi)$ se e solo se vale la formula

$$(^2) \qquad \sum_{i \in I} \psi(i) \, | \, x'(e_i) \, | = +\infty \qquad (A) »$$

DIMOSTRAZIONE. – Osserviamo anzitutto che per ogni $x \in X$ si ha $x = \sum_{i \in I} f_i(x) e_i$. Ora se x' è illimitato su $P(\psi)$, per ogni intero $r \geq 0$ esiste un $x_r \in P(\psi)$ tale che $| \, x'(x_r) \, | \geq r$, ma allora dalla formula $x_r = \sum_{i \in I} f_i(x_r) e_i$, segue subito $r \geq \sum_{i \in I} \psi(i) \, | \, x'(e_i) \, |$ e quindi la (A).

Se poi vale la (A), l'insieme $I' = \{ \, i \in I : x'(e_i) \neq 0 \, \}$ è una parte infinita di I e si può definire per ogni $i \in I'$ il numero $\rho_i = \overline{x'(e_i)} / |x'(e_i)|$ e quindi, per ogni parte finita J di I', il vettore $x_J = \sum_{i \in J} \psi(i) \rho_i e_i$. Si ha allora che $x_J \in P(\psi)$ mentre $\sup_J | \, x'(x_J) \, | = +\infty$, cioè x' è illimitato su $P(\psi)$.

Dal lemma segue che x' è illimitato su di una bornologia cartesiana β_Ψ se e solo se esiste una $\psi \in \Psi$ per cui valga la (A). Si può provare il seguente:

TEOREMA 1. – « Sia β_Ψ una bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana su X avente per duale un sottospazio Y di X^*.

Esiste allora un'altra bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana β_Φ strettamente più fine della β_Ψ ma avente lo stesso duale. »

DIMOSTRAZIONE. – Poichè Y è differente da X^*, si può trovare una $\psi_0 \in \Psi$ ed una parte infinita I_0 di I in modo che ψ_0 non sia mai nulla su I_0. Ripartiamo quindi I_0 nell'unione di una famiglia infinita di parti infinite e vicendevolmente disgiunte:

$$I_0 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \qquad (\Lambda \text{ e } I_\alpha \text{ insiemi infiniti, } I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset \text{ se } \alpha \neq \beta)$$

e definiamo la sottofamiglia di Ψ

$$\Phi = \{ \, \psi \in \Psi : \psi \text{ è quasi ovunque nulla su } I_\alpha, \text{ per quasi ogni } \alpha \in \Lambda \, \}$$

È facile verificare che Φ soddisfa agli assiomi (c_i) e quindi definisce una bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana β_Φ che è strettamente più fine

(2) Se α una funzione reale non negativa definita su un insieme I; porremo $\sum_{i \in I} \alpha(i) = \sup \{ \sum_{i \in J} \alpha(i) : J \text{ parte finita di } I \}$.

della β_Ψ dal momento che, per costruzioue, ψ_0 appartiene a Ψ ma non a Φ.

Il teorema sarà allora provato se mostreremo che il duale di β_Φ, già contenente Y, è anche contenuto in Y, ciò che per il Lemma equivale a dire che per ogni funzionale lineare x' non appartenente ad Y si può trovare una $\varphi \in \Phi$ per cui

$$\sum_{i \in I} \varphi(i) \, | x'(e_i) | = +\infty \qquad (B)$$

Ora, in corrispondenza di x', esiste certo una $\psi \in \Psi$ per cui $\sum_{i \in I} \psi(i) \, | x'(e_i) | = +\infty$

Si danno allora tre casi:

(I) $\sum_{i \notin I_0} \psi(i) \, | x'(e_i) | = +\infty$

(II) $\sum_{i \in I_\gamma} \psi(i) \, | x'(e_i) | = +\infty$ per un certo $\gamma \in \Lambda$

(III) $\sum_{i \in I_\alpha} \psi(i) \, | x'(e_i) | = b_\alpha < +\infty$ per ogni $\alpha \in \Lambda$ ma $\sum_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha = +\infty$

Nel caso (I) si definisce la φ ponendo $\varphi(i) = 0$ per $i \in I_0$ e $\varphi(i) = = \psi(i)$ per i restanti valori $i \in I$; nel caso (II) si pone invece $\varphi(i) = 0$ per $i \notin I_\gamma$ e $\varphi(i) = \psi(i)$ per gli altri $i \in I$.

Quanto al caso (III) si osserva che per ogni $\alpha \in \Lambda$ si può trovare una parte finita J_α di I_α per cui $\sum_{i \in J_\alpha} \psi(i) \, | x'(e_i) | \geq \frac{1}{2} b_\alpha$ e quindi, posto $J_0 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} J_\alpha$, si ha

$$\sum_{i \in J_0} \psi(i) \, | x'(e_i) | \geq \sum_{\alpha \in \Lambda} \left(\frac{1}{2} b_\alpha \right) = +\infty$$

Si definisce allora $\varphi(i) = 0$ per $i \notin J_0$ e $\varphi(i) = \psi(i)$ per gli altri $i \in I$. In ogni caso si ottiene una funzione $\varphi \in \Phi$ che verifica la (B).

3. - Conclusione.

Il teorema 1 ci permette di individuare una classe di sottospazi Y di X^* soddisfacenti alle richieste enunciate nel sunto

TEOREMA 2. - « Sia Y un sottospazio proprio di X^* per cui esiste una base di Hamel $\boldsymbol{E}$ ed una bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana β_1, avente duale Y.

Allora fra le bornologie loc. convesse su X di duale Y non ve ne è una più fine di tutte ».

DIMOSTRAZIONE. - Se per assurdo vi fosse una certa $\tilde{\beta}$ di duale Y e più fine di ogni bornologia loc. convessa su X avente lo stesso duale, passando alla bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana associata $\tilde{\beta}_\rho$ si avrebbe $\tilde{\beta} \subseteq \tilde{\beta}_\rho \subseteq \beta_1$ di modo che Y sarebbe anche il duale di $\tilde{\beta}_\rho$ e allora $\tilde{\beta}_\rho$ sarebbe la più fine bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana su X di duale Y. Ma ciò contrasta con il Teorema 1.

Resta ora solo da mostrare qualche esempio di bornologia cartesiana.

Premettiamo la seguente nota

OSSERVAZIONE. – « Sia Ψ la classe di tutte le funzioni reali non–negative definite su un insieme I. Introduciamo le seguenti sottoclassi di Ψ

$$\Psi_0 = \{ \psi \in \Psi : \psi \ \text{è quasi ovunque nulla su} \ I \}$$

$$\Psi_p = \{ \psi \in \Psi : \sum_{i \in I} [\psi(i)]^p < +\infty \} \qquad p \ \text{intero} \geq 1$$

$$\Psi_\infty = \{ \psi \in \Psi : \sup_{i \in I} | \psi(i) | < +\infty \}$$

Allora $\psi \in \Psi$ è tale che $\sum\limits_{i \in I} \psi(i)\varphi(i) < +\infty$ per ogni $\varphi \in \Psi_p$ (risp. $\varphi \in \Psi$) se e solo se $\psi \in \Psi_q$ (risp. $\psi \in \Psi_0$) ove $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. »

Con la nomenclatura dell'ossservazione precedente, enunciano gli esempi:

ESEMPIO 1. – « Sia X uno spazio lineare su $\boldsymbol{K}$di base $\boldsymbol{E} = \{ e_i \}_{i \in I}$.

Allora Ψ verifica le condizioni (c_i) e definisce quindi una bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana β_Ψ il cui duale è il sottospazio di X^*

$$Y_0 = \{ x' \in X^* : x'(e_i) = 0 \quad \text{per quasi ogni} \quad i \in I \}.$$

Si vede subito che β_Ψ coincide con la bornologia debole su X relativa ad Y_0, e che inoltre β_Ψ è la meno fine bornologia $\boldsymbol{E}$-cartesiana su X. »

ESEMPIO 2. – « Sia X come sopra. Ψ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ verifica le (c_i) e definisce quindi la bornologia β_{Ψ_p} il cui duale (grazie al Lemma e all'Osservazione) è

$$Y_q = \{ x' \in X^* : \Sigma \, | x'(e_i) |^q < +\infty \} \qquad \left(\text{ove} \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

Nel caso $p = \infty$, β_{Ψ_∞} è la bornologia debole relativa ad Y_∞; per $p \neq \infty$ si ha invece che β_{Ψ_p} e diversa da β_{Y_q}.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. W. MACKEY, *On infinite-dimensional linear spaces*, Trans. of the Amer. Math. Soc. (1946).

[2] A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, Publicação da Sociedade de Matemática de S. Paulo (1958).

[3] L. WAELBROECK, *Les espaces a bornés complets*, Colloque sur l'analyse fonctionelle Louvain (1961).

[4] H. BUCHWALTER, *Espaces vectoriels bornologiques*, Pubblications du Dép de Mathématiques, Lyon (1965).

Pervenuta alla Segreteria dell' U.M I
il 5 maggio 1966