Bollettino
Unione Matematica Italiana

Romolo Musti

Sugli E_3 piani corrispondenti in una trasformazione puntuale fra spazi proiettivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.3, p. 272–284.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_272_0>

Sugli E_3 piani corrispondenti in una trasformazione puntuale fra spazi proiettivi.

ROMOLO MUSTI (Bologna) (*)

Sunto. - *Sia (O, O') una coppia regolare di punti corrispondenti in una trasformazione T fra spazi proiettivi S_r, S'_r. Si studiano gli E_3 piani corrispondenti in T aventi centro in O e O'.*

1. - Se (O, O') è una coppia regolare di punti corrispondenti in una trasformazione T fra spazi proiettivi S_r, S', $(r > 2)$, ad un E_3 piano di centro O la T fa corrispondere un E_3 di centro O', che in generale non è piano. Scopo del presente lavoro è appunto quello di ricercare le condizioni cui deve soddisfare un E_3 piano affinchè anche il corrispondente sia piano (n° 2).

Va rilevato che se l'E_1 è caratteristico, tali condizioni coinvolgono solamente l'E_2 dell'E_3 (n° 3). Ne viene quindi che per un E_2, il cui E_1 sia caratteristico, o nessun E_3 piano che lo contiene può essere trasformato in E_3 piano, oppure, se ciò accade per uno di essi, deve accadere per tutti. La seconda alternativa si verifica, di regola, solo per una semplice infinità di E_2 (n° 3).

Per un E_1 invece che non sia caratteristico, esiste sempre un E_2 per cui tutti gli E_3 piani siano trasformati in E_3 piani (è l'E_2 il cui corrispondente è inflessionale): per un E_1 generico, non vi sono altri E_2 che godono di questa proprietà (n° 4). Si dimostra che condizione necessaria, ma non sufficiente, perchè ciò accada per tutti gli E_2 contenenti l'E_1 è che questo sia caratteristico (n° 6). Ne viene che (n° 7) condizione necessaria, ma non sufficiente, affinchè nella coppia (O, O') tutti gli E_3 piani si corrispondano è che in tale coppia le direzioni caratteristiche siano indeterminate. (1) Gli E_3 piani che sono trasformati in E_3 piani in tal caso sono quelli che contengono un E_1 (caratteristico) inflessionale di specie superiore.

Per un generico E_2, non tangente a una direzione caratteristica. non esistono E_3 piani che siano trasformati in E_3 piani se $r > 3$,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca Matematica n° 26 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(1) La condizione detta, necessaria in una coppia, diventa anche sufficiente se la si soppone verificata in ogni coppia (n° 8).

e ne esiste uno solo se $r = 3$ (n° 4). Per ogni E_1 si studiano dettagliatamente le proprietà degli E_2 che hanno un comportamento particolare (n° 4, 5).

Infine (n° 9) si studiano, per $r = 3$, le possibili configurazioni, per ogni E_1 caratteristico, degli E_2 i cui E_3 piani sono tutti trasformati in E_3 piani. Va rilevato come, in taluni casi, tali configurazioni si possano caratterizzare mediante semplici proprietà degli E_1 caratteristici stessi.

2. - Sia T una trasformazione differenziabile di classe C^3 fra due spazi proiettivi, reali o complessi, S_r $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ed S'_r $(x'_1, x'_2, \dots, x'_r)$; essa si può sempre rappresentare localmente, nell'intorno di una coppia regolare (O, O') con le equazioni ([2])

$$x'_i = x_i + \varphi^i(x) + \psi^i(x) + [4] \qquad (i = 1, 2, \dots, r)$$

avendo posto

$$\varphi^i(x) = \sum_{j,k} b^i_{jk} x_j x_k, \quad \psi^i(x) = \sum_{j,k,h} c^i_{jkh} x_j x_k x_h$$

ed avendo indicato con [4] i resti degli sviluppi.

Considerato il generico elemento lineare E_3 del terzo ordine di centro O, siano

$$x_i = p_i t + q_i t^2 + r_i t^3 \qquad (i = 1, 2, \dots, r)$$

le sue equazioni. Si può in generale porre $x_1 = t$ e quindi $p_1 = 1$, $q_1 = r_1 = 0$.

L' E'_3 di S'_r, trasformato dell' E_3 di S_r dalla T, è

$$x_i' = p_i t + [q_i + \varphi^i(p)]t^2 + [r_i + \varphi^i \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \psi^i(p)]t^3$$

avendo indicato con $\varphi^i \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ la forma polare di φ^i.

L' E_3 di S_r è piano se e solo se

$$\| p_i \quad q_i \quad r_i \| = 0$$

cioè, quando l' E_2 non è inflessionale, se esistono due numeri μ, ν tali che

$$r_i = \mu q_i + \nu p_i \tag{1}$$

([2]) Cfr. M. VILLA, *Lezioni di Geometria*, vol. II, Cedam (1965), pag. 332.

L' E'_3 di S'_r è piano se e solo se la matrice

$$\left\| p_i \quad q_i + \varphi^i(p) \quad r_i + \varphi^i\binom{p}{q} + \psi^i(p) \right\| \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

è nulla, cioè per la (1) se

$$\left\| p_i \quad q_i + \varphi^i(p) \quad \mu q_i + \varphi^i\binom{p}{q} + \psi^i(p) \right\| = 0. \tag{2}$$

Se poi l' E_2 dell' E_3 è inflessionale, gli E_3 per esso, cui corrispondono E_3 piani, son quelli per cui

$$\| p_i \quad \varphi^i(p) \quad r_i + \psi^i(p) \| = 0. \tag{2'}$$

Si noti che, mentre la condizione affinchè due E_2 inflessionali si corrispondano in T è relativa ai loro E_1 (cioè che i loro E_1 siano caratteristici), la condizione affinchè due E_3 piani si corrispondano in T dipende effettivamente, di regola, dagli E_3 stessi; infatti nella condizione trovata (2) compare il μ, che è relativo all'E_3.

3. - Se l'E_1 dell'E_3 è caratteristico, si ha $\| \varphi^i(p) \quad p_i \| = 0$ cioè esiste un numero ρ tale che

$$\varphi^i(p) = \rho p_i$$

e quindi la (2) diviene

$$\left\| p_i \quad q_i \quad \varphi^i\binom{p}{q} + \psi^i(p) \right\| = 0. \tag{3}$$

Vale a dire, la condizione affinchè due E_3 piani, i cui E_1 siano caratteristici, si corrispondano in T dipende solo dai relativi E_2; e più precisamente, poichè le (3) costituiscono un sistema di $r-2$ equazioni nelle $r-1$ incognite $q_2, q_3, \ldots, q_r$ (avendo normalizzato il parametro in modo che $q_1 = 0$), per ogni E_1 caratteristico esistono, di segola, ∞^1 E_2 tali che ogni E_3 piano contenente un tale E_2 sia trasformato in un E_3 piano. Fra questi vi è l'E_2 di flesso ($q_i = 0$).

4. - Per $r > 3$ le (2) costituiscono un sistema di equazioni lineari in μ. Escluso quindi il caso in cui l'E_1 sia caratteristico, *per un E_2 generico, non esitono E_3 piani che siano trasformati in E_3 piani.*

Infatti, supposto, come in generale accade,

$$\|p_i \quad q_i \quad \varphi^i(p)\| \neq 0 \tag{4}$$

si ha che la condizione necessaria e sufficiente affinchè le (2) siano compatibili, è che esistono tre numeri μ, h, k tali che

$$\mu q_i + \varphi^i\binom{p}{q} + \psi^i(p) = hp_i + k[q_i + \varphi^i(p)],$$

cioè che sia

$$\left\| p_i \quad q_i \quad \varphi^i(p) \quad \varphi^i\binom{p}{q} + \psi^i(p) \right\| = 0. \tag{5}$$

Per un E_2 soddisfacente le (4) e (5) *vi è poi un solo E_3 piano trasformato in E_3 piano.*

Per $r = 3$ invece, il sistema (2) si riduce alla sola equazione

$$\left| p_i \quad \varphi^i(p) \quad q_i \right| \mu + \left| p_i \quad q_i + \varphi^i(p) \quad \varphi^i\binom{p}{q} + \psi^i(p) \right| = 0$$

che, nell'ipotesi (4) ha sempre una ed una sola radice. Ciò vuol dire che, per un generico E_2, esiste sempre un E_3 piano, ed uno solo, trasformato in un E_3 piano.

Consideriamo adesso, per r qualunque, gli E_2 che verificano il sistema

$$\|p_i \quad q_i \quad \varphi^i(p)\| = 0. \tag{6}$$

Esclusi quelli tangenti ad una direzione caratteristica (n° 3), essi sono tutti e solo quelli per cui può scriversi

$$q_i = \rho p_i + \sigma\varphi^i(p) \tag{6'}$$

con ρ, σ numeri arbitrariamente assegnati [3].

Per $\sigma = 0$ si ha *l'E_2 inflessionale; per il quale, è ovvio, esistono*

[3] Assumendo $x_1 = t$ si ha $\rho + \sigma\varphi^1(p) = 0$, sicchè gli E_2 in discorso sono ∞^1.

∞^1 E_3 *(piani) trasformati in* E_3 *piani* [4].
Per i rimanenti non può in generale dirsi che esistono E_3 piani che siano trasformati in E_3 piani.
Se operiamo una partizione di tali E_2 in classi, in modo che gli E_2 di una medesima classe abbiamo comune l'E_1, ciascuna classe costituisce un pennello $\mathcal{P}_{E_1}$ [5].

Infatti, fissate le p, si ha che gli E_2 della classe considerata sono tutti gli ∞^1 E_2 del piano

$$\| x_i \quad p_i \quad \varphi^i(p) \| = 0.$$

Fra gli E_2 di ciascun pennello, quelli per cui esistono E_3 piani cui corrispondono E_3 piani, sono ovviamente tutti e solo quelli, oltre all'E_2 inflessionale, che si hanno per σ verificanti il sistema

$$(7) \qquad (\sigma + 1) \left\| p_i \quad \varphi^i(p) \quad \sigma\varphi^i \binom{p}{\varphi} + \psi^i(p) \right\| = 0$$

ottenuto da (2) per sostituzione delle (6').
Uno di tali E_2, corrispondente alla soluzione $\sigma = -1$, è quindi quello cui corrisponde l'E_2 di flesso, e dipende solamente dall'intorno del 2° ordine della trasformazione. Tutti gli E_3 piani per esso sono evidentemente trasformati in E_3 piani.

Per un E_1 *generico se* $r > 3$, *oltre all'*E_2 *di flesso, e quello corrispondente all'*E_2 *di flesso, non ve ne sono altri contenenti* E_3 *piani trasformati in* E_3 *piani*, in quanto il sistema

$$(8) \qquad \left\| p_i \quad \varphi^i(p) \quad \sigma\varphi^i \binom{p}{\varphi} + \psi^i(p) \right\| = 0$$

non ha in generale soluzione.
Infatti supposto

$$(9) \qquad \left\| p_i \quad \varphi^i(p) \quad \varphi^i \binom{p}{\varphi} \right\| \neq 0,$$

[4] Infatti, detto E'_2 il corrispondente, che non è di flesso avendo supposto l'E_1 non caratteristico, gli E_3 per l'E_2 inflessionale, trasformati in E_3 piani, sono tutti e solo gli ∞^1 E_3 dell'E_2 i cui corrispondenti giacciono sul piano osculatore dell'E_2.

[5] Cfr. E Bompiani, *Nuovi enti geometrici: pseudo-elementi differenziali*, Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano, vol. XXXIII., p. 236 (1963).

condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (8) sia possibile è che l'E_1 appartenga al cono

$$\left\| p_i \quad \varphi^i(p) \quad \varphi^i\binom{p}{\varphi} \quad \psi^i(p) \right\| = 0. \tag{10}$$

Se $r = 3$ invece, il sistema (8) si riduce ad una sola equazione che, nell'ipotesi (9) ha sempre una ed una sola soluzione.

Per gli E_1 soddisfacenti le (9) e (10) (le sole (9) se $r = 3$) esiste una ed una sola radice delle (8). Nel pennello $\mathcal{S}_{E_1}$ resta pertanto individuato un E_2, determinato dall'intorno del 3^0 ordine della trasformazione, per il quale, come facilmente si riconosce, la (2) è identicamente soddisfatta rispetto a μ.
Ciò vuol dire che *se l'E_1 appartiene al cono* (10), *oltre all'E_2 corrispondente all'E_2 di flesso, in $\mathcal{S}_{E_1}$ vi è un altro E_2 con la proprietà che ogni E_3 piano per esso é trasformato in E_3 piano.*

Per gli E_1 invece che appartengono al cono

$$\left\| p_i \quad \varphi^i(p) \quad \varphi^i\binom{p}{\varphi} \right\| = 0 \tag{11}$$

la (2) è identicamente soddisfatta oppure non ha soluzioni a seconda che l'E_1 appartiene o no rispettivamente anche al cono

$$\| p_i \quad \varphi^i(p) \quad \psi^i(p) \| = 0. \tag{12}$$

Nel primo caso, escludendo l'E_2 di flesso, ciascun E_2 del pennello ha la proprietà che ogni E_3 piano per esso è trasformato in E_3 piano. Nel secondo caso invece non vi sono, nel pennello $\mathcal{S}_{E_1}$, E_2 aventi tale proprietà, ad eccezione di quello cui corrisponde l'E_2 di flesso.

5. – Si rileva che, se gli E_3 piani per un E_2, trasformati in E_3 piani, non sono in numero finito, essi costituiscono un sottoinsieme *proprio I* dell'insieme di tutti gli E_3 piani per l'E_2 se e solo se l'E_2 è inflessionale non caratteristico.

Si dimostra che due sono le configurazioni possibili per gli E_3 di *I*. Più precisamente si ha:

Gli E_3 di un E_2 inflessionale non caratteristico, trasformati in E_3 piani, sono tutti gli E_3 di un ben determinato piano per l'E_2, oppure sono distribuiti sui piani per l'E_2 in modo che su ogni piano del fascio, ad eccezione di uno solo che ne è privo, ve ne sia sempre uno.

Si ha la prima o la seconda delle configurazioni a seconda che l'E_1 appartiene ad una generatrice qualunque non caratteristica del cono (12) oppure no.

Infatti, nell'ipotesi che l'E_1 appartenga ad una generatrice del cono (12), la (2') può scriversi

$$\| p_i \quad \varphi^i(p) \quad r_i \| = 0. \tag{13}$$

Gli E_3 per l'E_2 inflessionale che verificano la (13) hanno equazioni

$$x_i = p_i t + [\lambda p_i + \mu \varphi^i(p)] t^3$$

con λ, μ arbitrariamente assegnati. Essi appartengono quindi al piano

$$\left\| \begin{matrix} x_i \\ p_i \\ \varphi^i(p) \end{matrix} \right\| = 0 \tag{14}$$

che dipende unicamente dall'E_1 e dall'intorno del 2° ordine della trasformazione.

Viceversa, un E_3 contenente l'E_2 inflessionale considerato

$$x_i = p_i t + r_i t^3$$

appartiene al piano (14) se e solo se

$$\| r_i \quad p_i \quad \varphi^i(p) \| = 0,$$

cioè se verifica la (13): il che equivale a dire che è trasformato dalla T in un E_3 piano.

Supponiamo adesso che l'E_1 non appartenga ad una generatrice del cono (12). Gli E_3 che verificano la (2') sono

$$x_i = p_i t + [\lambda p_i + \mu \varphi^i(p) - \psi^i(p)] t^3$$

con λ, μ arbitrariamente assegnati.
Il piano cui appartiene un tale E_3 è

$$\left\| \begin{matrix} x_i \\ p_i \\ \mu\varphi^i(p) - \psi^i(p) \end{matrix} \right\| = 0 \tag{16}$$

e dipende dall'E_3 stesso.

Viceversa, sul piano generico per l'E_2, che rappresentiamo con l'equazione

$$\left\| \begin{matrix} x_i \\ p_i \\ h\varphi^i(p) - \psi^i(p) \end{matrix} \right\| = 0,$$

degli E_3 considerati vi è solo quello per cui $\mu = h$.
Fa eccezione il piano

$$\| x_i \quad p_i \quad \psi^i(p) \| = 0$$

che, come si può riconoscere facilmente, non contiene nessuno degli E_3 in questione.

6. - Dimostriamo ora che:

Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinchè ogni E_3 piano di un E_1 sia trasformato in un E_3 piano è che l'E_1 sia caratteristico.

Infatti se ogni E_3 piano di un prefissato E_1 è trasformato in E_3 piano, vuol dire che per ogni E_2 contenente l'E_1 deve la (2) essere identicamente soddisfatta rispetto a μ. Cioè debbono essere identicamente soddisfatti rispetto alle q i sistemi

(17) $$\| p_i \quad \varphi^i(p) \quad q_i \| = 0,$$

(18) $$\left\| p_i \quad q_i + \varphi^i(p) \quad \varphi^i\binom{p}{q} + \psi^i(p) \right\| = 0.$$

Se il sistema (17) è identicamente soddisfatto, allora è

$$\| p_i \quad \varphi^i(p) \| = 0,$$

cioè l'E_1 è caratteristico.
La condizione non è però sufficiente. Infatti deve essere identicamente soddisfatta anche la (18), che in tal caso può scriversi

$$\left\| p_i \quad q_i \quad \varphi^i\binom{p}{q} + \psi^i(p) \right\| = 0.$$

7. - Da quanto precede si può dire che:

Perchè una trasformazione, in una coppia regolare di punti corrispondenti, muti E_3 piani in E_3 piani, è necessario che le direzioni caratteristiche nella coppia considerata siano indeterminate.

La condizione non è peraltro sufficiente. Infatti, se nella coppia

$(0, 0')$ le direzioni caratteristiche sono indeterminate, le equazioni della trasformazione possono rappresentarsi localmente nella forma (6)

$$x'_i = x_i + \psi^i(x) + [4].$$

Il sistema (3) diventa pertanto

$$\| p_i \quad q_i \quad \psi^i(p) \| = 0$$

ed è identicamente soddisfatto nelle q se, e solo se, è

$$\| p_i \quad \psi^i(p) \| = 0$$

vale a dire se e solo se l'E_1 è inflessionale di specie superiore (7). Si ha quindi:

Perchè in una coppia regolare di punti corrispondenti in cui le direzioni caratteristiche sono indeterminate, tutti gli E_3 piani contenenti un dato E_1 siano trasformati in E_3 piani é necessario e sufficiente che l'E_1 sia inflessionale di specie superiore.

Se le direzioni caratteristiche sono indeterminate, esistono pertanto in generale solo $\frac{1}{2}(3^r - 1)$ E_1 (8) i cui E_3 piani sono tutti trasformati in E_3 piani.

Se si suppone quindi che in una coppia regolare di punti corrispondenti (O, O') le direzioni caratteristiche siano, oltre che indeterminate, inflessionali di specie superiore, la trasformazione fa corrispondere ad ogni E_3 piano di centro 0 un E_3 piano di centro O', e viceversa.
Si ha quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni E_3 piano, nell'intorno di una coppia regolare di punti corrispondenti, sia trasformato in un E_3 piano è che in tale coppia le direzioni caratteristiche siano indeterminate ed inflessionali di specie superiore.

8. – L'indeterminazione delle direzioni caratteristiche, che è condizione solamente necessaria in una coppia affinchè ad E_3 piani corrispondano E_3 piani, diventa invece anche sufficiente se la si

(6) Cfr. M. VILLA, op. cit. in (2), p. 338.

(7) Cfr. M. VILLA, *Direzione d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, Boll. U.M.I., Ser. III, vol. II, (1947), p. 188.

(8) M. VILLA, op. cit. in (7), p. 194.

suppone in ogni coppia di punti: come è ben noto, la trasformazione è in tal caso una omografia.
In questa agli E_3 piani corrispondono avviamente E_3 piani.
Ne viene:

Le uniche trasformazioni fra spazi proiettivi che ad E_3 piani facciano corrispondere E_3 piani sono le omografie.

9. - Dal n⁰ 3 discende che per il generico E_2 di un E_1 caratteristico, nessun E_3 piano che lo contiene ha la proprietà di essere trasformato in E_3 piano. Di tale proprietà godono invece, per un prefissato E_1 caratteristico, tutti e solo gli E_3 degli ∞^1 E_2 soddisfacenti il sistema (3) che, nel caso di una trasformazione tra spazi di dimensione tre, si riduce alla sola equazione

$$\left| p_i \quad q_i \quad \varphi^i\binom{p}{q} + \psi^i(p) \right| = 0. \tag{19}$$

Tale famiglia di E_2, supponendo l'E_1 coincidente con la direzione dell'asse $x_2 = x_3 = 0$ [9], è rappresentata dagli E_2 [10]

$$(F) \qquad \begin{aligned} x_2 &= q_2 x_1^2 + [3] \\ x_3 &= q_3 x_1^2 + [3] \end{aligned}$$

con q_2, q_3 soddisfacenti l'equazione

$$\begin{vmatrix} q_2 & b^2_{21} q_2 + b^2_{31} q_3 + c^2_{111} \\ q_3 & b^3_{21} q_2 + b^3_{31} q_3 + c^3_{111} \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Posto

$$q_2 = \lambda q_3$$

λ e q_3 soddisfano, trascurando la soluzione $q_3 = 0$, l' equazione

$$[b^3_{21}\lambda^2 + (b^3_{31} - b^2_{21})\lambda - b^2_{31}]\, q_3 + c^3_{111}\lambda - c^2_{121} = 0. \tag{21}$$

Supposto che nessuno dei due polinomi

$$b^3_{21}\lambda^2 + (b^3_{21} - b^2_{21})\lambda - b^2_{31}: \qquad c^3_{111}\lambda - c^2_{111}$$

[9] $b^2{}_{11} = b^3{}_{11} = 0$; $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$.
[10] (F) comprende anche l'E_2 inflessionale, come è ovvio.

sia identicamente nullo (come avviene in generale), per ogni λ fissato, esiste in generale uno ed un solo valore di q_3 soddisfacente la (21). Vale a dire, in ciascun piano per la retta caratteristica considerata, vi è, in generale, un solo E_2 della famiglia (F), oltre quello inflessionale. Sono eccezionali i due piani π_1, π_2 corrispondenti ai valori λ_1, λ_2 di λ soddisfacenti l'equazione

$$b^3_{21}\lambda^2 + (b^3_{31} - b^2_{21})\lambda - b^2_{31} = 0. \tag{22}$$

Su ciascuno di tali piani, che sono determinati dall'intorno del 2° ordine della trasformazione, non vi è, in generale, alcun elemento di (F) oltre quello inflessionale.
Può dunque dirsi:

Per un E_1 caratteristico gli ∞^1 E_2, i cui E_3 piani sono tutti trasformati in E_3 piani, sono in generale distribuiti sui piani per la retta caratteristica considerata, in modo che su ogni piano, oltre all'E_1 inflessionale, ve ne sia sempre uno ed uno solo, ad eccezione di due piani per cui in generale non ve ne sono altri ([11]).

Se $c^2_{111} = c^3_{111} = 0$, la (21) non dà alcuna nuova soluzione $(\neq 0)$ per valori di λ diversi da λ_1, λ_2. Per quest'ultimi invece è identicamente soddisfatta rispetto a q_3. La famiglia (F) consta pertanto di due soli pennelli (distinti o coincidenti) di E_2 (appartenenti ai piani determinati da (22)). Viceversa, se ciò accade, la (21) deve essere identicamente soddisfatta per due valori di λ e ciò è possibile se e solo se $c^3_{111}\lambda - c^2_{111} \equiv 0$ cioè se $c^2_{111} = c^3_{111} = 0$. D'altra parte tali condizioni equivalgono ad affermare che la direzione caratteristica è inflessionale di specie superiore.
Da qui segue:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano almeno due pennelli di E_2, tangenti ad una direzione caratteristica, i cui E_3 piani sono trasformati in E_3 piani, è che la direzione caratteristica sia inflessionale di specie superiore.

Supponendo adesso

$$b^3_{21} = b^2_{31} = c^3_{111} = c^2_{111} = 0;\ b^3_{31} = b^2_{21} \tag{23}$$

([11]) Nel caso particolare in cui la (22) abbia con la $c^3_{111}\lambda - c^2_{111} = 0$ una radice comune, uno ed uno solo dei due piani viene invece a possedere un pennello di E_2 appartenenti alla famiglia (F). La configurazione di (F) viene ad arricchirsi pertanto di un pennello di E_2.

l'equazione (21) è identicamente soddisfatta rispetto a q_3 per ogni valore di λ. Tutti gli E_3 piani, contenenti l'E_1 caratteristico considerato, sono pertanto trasformati in E_3 piani. Viceversa, se ciò accade, la (21) deve essere identicamente soddisfatta rispetto a q_3 per ogni valore di λ, e quindi debbono aver luogo le (23).

Ma le (23) equivalgono ad affermare che per ogni curva γ di S_3, uscente da O ed ivi tangente alla retta caratteristica considerata, esiste una omografia K (anzi sono ∞^2) tale che le curve $T\gamma$ e $K\gamma$, trasformate di γ in T e K rispettivamente, abbiamo in O' contatto geometrico del terzo ordine [12] [13].

Si ha pertanto:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè tutti gli E_3 piani di un E_1 caratteristico siano trasformati in E_3 piani è che l'E_1 sia ipercaratteristico in senso debole.

Infine, se $b^3_{31} = b^2_{31} = b^3_{31} - b^2_{21} = 0$, ma non contemporaneamente $c^3_{111} = 0$, $c^2_{111} = 0$ la (21), per λ generico, non è soddisfatta

---

[12] Infatti la curva γ, limitatamente all'intorno del 3° ordine può rappresentarsi

$$x_2 = hx_1^2 + rx_1^3 + [4]$$
$$x_3 = kx_1^2 + sx_1^3 + [4].$$

Le due trasformate mediante T ed una omografia tangente $x'_i = x_i(1 + \lambda x_1 + \mu x_2 + \upsilon x_3)^{-1}$ sono rispettivamente

$$(T\gamma) \begin{cases} x'_2 = hx_1'^2 + \{ 2(b^2_{12} - b^1_{11})h + 2b^2_{13}k + c^2_{111} + r \} x_1'^3 + [4] \\ x'_3 = kx_1'^2 + \{ 2(b^3_{13} - b^1_{11})k + 2b^3_{12}h + c^3_{111} + s \} x_1'^3 + [4] \end{cases}$$

e

$$(K\gamma) \begin{cases} x'_2 = hx_1'^2 + (\lambda h + r)x_1'^3 + [4] \\ x'_3 = kx_1'^2 + (\lambda k + s)x_1'^3 + [4]. \end{cases}$$

Perchè $T\gamma$ e $K\gamma$ abbiamo il contatto geometrico del 3° ordine occorre e basta che

$$b^2_{13} = b^3_{12} = c^2_{111} = c^3_{111} = 0,\ b^2_{12} = b^3_{13},\ \lambda = 2(b^2_{12} - b^1_{111})$$

da cui si vede che di omografie tangenti in questione ve ne sono ∞^2.

[13] Chiameremo *ipercaratteristica in senso debole* una retta caratteristica avente la suddetta proprietà, essendo state chiamate ipercaratteristiche quelle per cui il contatto fra le curve $T\gamma$ e $K\gamma$ è invece analitico del 3° ordine (Cfr. L. MURACCHINI, *Le trasformazioni puntuali che posseggono rette ipercaratteristiche*, Boll. U.M.I. Ser. III, vol. XI (1956), p. 182.

per alcun valore di q_3. È invece identicamente soddisfatta per il valore di λ per cui è

$$c^3{}_{111}\lambda - c^2{}_{111} = 0.$$

Ciò vuol dire che esiste solo un pennello di E_2 per ciascuno dei quali gli E_3 piani sono tutti trasformati in E_3 piani e viceversa. Ciò accade, ad esempio, quando la retta caratteristica è generatrice doppia della rete

$$\sum_{1}^{3}{}_{ij}\, \mu_{ij}\, [x_i\, \varphi^j(x) - x_j\, \varphi^i(x)] = 0$$

di coni che individua le direzioni caratteristiche ([14]).

([14]) MURACCHINI. Op. cit. in ([13]), n. 3

*Pervenuta alla Segreteria dell'*U.M.I.
il 4 maggio 1966