Bollettino Unione Matematica Italiana

Piero Bonera

Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente. Nota I.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.3, p. 259–271.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_259_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Dei sistemi lineari di quadriche di S_r a matrice jacobiana nulla identicamente

PIERO BONERA (Bologna) (*)

NOTA I

Sunto. - *Si reca l'attenzione sulla matrice jacobiana del sistema e si mettono in luce talune proprietà algebriche della matrice, che servono per giungere a talune proprietà geometriche del sistema* ([1])

1. - Nello spazio lineare S_r, riferito a coordinate proiettive omogenee x_i o x^i $(i = 0, 1, \dots, r)$ di punto, si assumano $h + 1 > r$ quadriche indipendenti linearmente tra loro (**):

$$a_j^{ik} x_i x_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, \dots, r; j = 0, 1, \dots, h)$$

e, posto:

$$f_j(x_0, x_1, \dots, x_r) \equiv a_j^{ik} x_i x_k,$$

si consideri il sistema lineare ∞^h:

$$\lambda^j f_j = 0 \tag{1}$$

individuato dalle quadriche predette.

Ciò premesso, si supponga che la matrice funzionale o jacobiana delle forme f_j, cioè che la matrice (di $h + 1$ righe ed $r + 1$ colonne):

$$J \equiv \left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right\|$$

sia nulla identicamente e di caratteristica r.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca N. 26 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R

(**) In questo lavoro la sommatoria si indica con l'ormai nota scrittura abbreviata

([1]) Cfr., anche per altri riferimenti bibliografici:

C. BONFERRONI, *Sui sistemi lineari di quadriche la cui jacobiana ha dimensione irregolare* « R. Acc. Sc. Torino », vol. 50, 1914-15.

L. MURACCHINI, *Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore alla ordinaria* (Parte II), « Riv. Mat. Univ. Parma », 3, 75-89 (1952).

L. DEGOLI, *Sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla di caratteristica $\leq r$*, « Acc. Sc. Bologna, Rend. » Serie XI, Tomo X, 1963.

Allora sarà nullo identicamente il determinante (d'ordine $r+1$):

$$\Delta_l \equiv \left| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right| \qquad (q = 0,\ 1,\ \dots,\ r-1,\ l),$$

essendo l uno qualsiasi dei numeri $r, \dots, h$, mentre, invece, non sarà nullo identicamente uno (almeno) dei minori d'ordine r della matrice J e precisamente, detto $\varphi^i (i = 0,\ 1, \dots, r)$ il complemento algebrico di $\partial f_l / \partial x_i$ in Δ_l, non sia nullo identicamente, ad es., il determinante (d'ordine r) φ^r.

Perciò non sarà nulla identicamente neppure la matrice (di r righe ed $r+1$ colonne):

$$J' \equiv \left\| \frac{\partial f_s}{\partial x_i} \right\| \qquad (s = 0.\ 1,\ \dots,\ r-1).$$

2. - Giova per il seguito osservare che, se (come si supporrà) non sono nulli identicamente tutti i minori d'ordine $r-1$ comuni a due qualunque dei determinanti φ^s $(s = 0,\ 1, \dots, r-1)$, anche due qualunque di questi non sono nulli identicamente.

Se, invero, fossero nulli identicamente, ad es., φ^0 e φ^1, un punto di S_r, che non annulli tutti i minori d'ordine $r-1$ ad essi comuni e che del resto sia qualunque, annullerebbe pure φ^r [2], che, essendo una forma (di grado r) nelle x_i, sarebbe quindi nullo identicamente, contro l'ipotesi.

Ora si dimostrerà la seguente proposizione, utile più avanti:

Se uno dei determinanti φ^s, ad es. φ^0, *è nullo identicamente e i minori d'ordine* $r-1$ *appartenenti ad* $r-1$ *colonne qualunque di* φ^0 *son primi tra loro, i determinanti* φ^t $(t = 1,\ 2, \dots, r)$ *(nessuno dei quali, per l'osservazione premessa, o per ipotesi, è nullo identicamente) differiscono tra loro soltanto per fattori costanti non nulli.*

Invero, un punto di S_r, che annulli uno qualunque dei φ^t, ad es. φ^1, ma non tutti i minori d'ordine $r-1$ comuni a φ^0 e a φ^1, annullerà pure tutti i φ^τ $(\tau = 2,\ 3, \dots, r)$ [2], che, in conseguenza, saranno tutti divisibili per ogni divisore primo di φ^1 (i minori predetti essendo primi tra loro).

Allora, applicando (colle ovvie necessarie modificazioni) a ciascuno dei φ^τ l'argomentazione precedente, si è condotti a scrivere le seguenti identità (rispetto alle x_i):

$$\varphi^t \equiv k^t \alpha^{a_t} \cdot \dots \cdot \beta^{b_t} \qquad (t = 1,\ 2,\ \dots,\ r), \tag{2}$$

[2] L. KRONECKER, *Werke*, 1, Leipzig, 1895, p. 238.

essendo $\alpha, \ldots, \beta$ polinomi omogenei irriducibili distinti, $a_t, \ldots, b_t$ interi non negativi (non tutti nulli), soddisfacenti le:

$$a_t + \ldots + b_t = r\,,$$

ed infine le k^t costanti non nulle.

Per dimostrare l'asserto occorre ora provare che coesistono le:

$$a_1 = \ldots = a_r = a\,, \ldots, b_1 = \ldots = b_r = b\,, \tag{3}$$

essendo $a, \ldots, b$ interi non negativi (non tutti nulli).

Allo scopo suppongasi che gli a_t non siano tutti uguali e che, ad es., sia $a_1 > 1$, precisamente dapprima $a_1 = 2$.

Allora sopra l'ipersuperficie (irriducibile) $\alpha = 0$ coesistono le:

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial x^k} = 0 \qquad (k = 0,\, 1, \ldots, r)\,. \tag{4}$$

Derivando rispetto ad x^k le seguenti $r + 1$ identità:

$$\frac{\partial f_q}{\partial x^i}\, \varphi^i \equiv 0 \qquad (i = 0,\, 1, \ldots, r;\; q = 0,\, 1, \ldots, r-1,\, l),$$

che deduconsi subito dal determinante Δ_l (nullo identicamente), si ottengono le altre:

$$2a^q_{ik}\varphi^i + \frac{\partial f_q}{\partial x^i}\,\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} \equiv 0\,, \tag{5}$$

avendo posto, per comodità di scrittura:

$$a^q_{ik} = a^{ik}_q\,.$$

Essendo $\varphi^0 \equiv 0$ e ricordando le (2), (4), le (5) divengono, sopra $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial f_q}{\partial x^\tau}\,\frac{\partial \varphi^\tau}{\partial x^k} = 0 \qquad (\tau = 2,\, 3, \ldots, r),$$

che, per ciascuno dei valori ammessi di k, possono riguardarsi come $r + 1$ equazioni lineari omogenee nelle $r - 1$ incognite $\partial\varphi^\tau / \partial x^k$.

Ebbene, siccome la matrice (di $r + 1$ righe ed $r - 1$ colonne):

$$\left\| \frac{\partial f_q}{\partial x^\tau} \right\| \qquad (q = 0,\, 1, \ldots, r-1,\, l;\; \tau = 2,\, 3, \ldots\, r)$$

non s'annulla nel generico punto della $\alpha = 0$, si dedurranno le:

$$\frac{\partial \varphi^\tau}{\partial x^k} = 0, \tag{4'}$$

cosicchè la $\alpha = 0$ è componente doppia almeno delle $\varphi^\tau = 0$, ossia è $a_\tau \geq 2$.

Ora suppongasi $a_1 = 3$.

Allora sopra $\alpha = 0$ coesistono le:

$$\frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x^k \partial x^p} = 0 \qquad (k, p = 0, 1, \ldots, r). \tag{6}$$

Derivando le (5) rispetto a x^p, si ottengono le:

$$2 a^q_{ik} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^p} + 2 a^q_{ip} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k} + \frac{\partial f_q}{\partial x^i} \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^k \partial x^p} \equiv 0,$$

le quali, essendo $\varphi^0 \equiv 0$ e ricordando le (4), (4'), (6), divengono, sopra $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial f_q}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 \varphi^\tau}{\partial x^k \partial x^p} = 0 \qquad (\tau = 2, 3, \ldots, r).$$

Procedendo come nell'ipotesi $a_1 = 2$, deducesi che, sopra $\alpha = 0$, coesistono le:

$$\frac{\partial^2 \varphi^\tau}{\partial x^k \partial x^p} = 0,$$

cosicchè $\alpha = 0$ è componente tripla almeno delle $\varphi^\tau = 0$, ossia è $a_\tau \geq 3$.

Così proseguendo, si può ormai concludere che, in ogni caso, è $a_\tau \geq a_1$ e, analogamente, $b_\tau \geq b_1$ (se gli interi b_t non sono tutti uguali ed è $b_1 > 1$).

Allora, applicando (colle ovvie necessarie modificazioni) a ciascuno dei φ^τ le argomentazioni finora svolte (com'è lecito, essendo $a_\tau \geq a_1$ e perciò $a_\tau > 1$), si conclude che devono coesistere le (3) e perciò, grazie alle (2), le:

$$\varphi^t \equiv k^t \alpha^a \cdot \ldots \cdot \beta^b \qquad (t = 1, 2, \ldots, r). \tag{2*}$$

L'asserto è dunque dimostrato.

3. - Si consideri il sistema lineare ∞^{r-1} di quadriche:

$$\lambda^s f_s = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, r-1), \tag{1'}$$

subordinato del sistema (1) ed associato alla matrice J' (num. 1).

Orbene, se un punto $\bar{x} \equiv (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$ di S_r non annulla la matrice (non nulla identicamente) J', gli iperpiani polari di $\bar{x}$, rispetto alle singole quadriche $f_s = 0$, cioè gli iperpiani:

$$\frac{\partial f_s}{\partial \bar{x}_i} x_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, r), \tag{7}$$

si segano nel punto $\bar{x}'$ di coordinate:

$$\rho \bar{x}'^i = \bar{\varphi}^i, \tag{8}$$

essendo ρ un arbitrario fattore di proporzionalità e:

$$\bar{\varphi}^i = \varphi^i(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r).$$

Premesso ciò, dal num. 2 può dedursi che, *se* (come si supporrà) *il sistema* (1′) *è privo di punti base doppi, nessuna delle forme* φ^i $(i = 0, 1, \ldots, r)$ *è nulla identicamente.*

Se, invero, fosse nulla identicamente una delle forme φ^i, ad es. φ^0, a norma del num. 2 coesisterebbero le (2*) e perciò anche le $\bar{\varphi}^t \neq 0$ (il punto $\bar{x}$ non annullando la matrice J').

Allora le (8) diverrebbero:

$$\bar{x}'^0 : \bar{x}'^1 : \ldots : \bar{x}'^r = 0 : k^1 : \ldots : k^r,$$

ossia $\bar{x}'$ sarebbe indipendente da $\bar{x}$ e percio esso sarebbe base doppio per il sistema (1′), contro l'ipotesi.

4. – Giova osservare che *l'ipersuperficie* (d'ordine r) $\varphi^i = 0$ *è il luogo dei punti coniugati dell'iperpiano* $x_i = 0$ *rispetto alle singole quadriche del sistema* (1′).

Infatti, si considerino gli r punti-vertice della piramide fondamentale, opposti alla faccia $x_i = 0$, indi gli iperpiani polari dei singoli punti nominati rispetto ad una quadrica qualsiasi del sistema (1′), cioè gli iperpiani di equazioni:

$$\lambda^s \frac{\partial f_s}{\partial x^t} = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, r-1;\ t = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r).$$

Allora l'equazione del luogo sopra nominato risulta eliminando le λ^s (non tutte nulle) dalle equazioni precedenti e perciò sesa è appunto $\varphi^i = 0$.

Ora si consideri il sistema lineare ∞^r di quadriche:

$$(1_l) \qquad \lambda^q f_q = 0 \qquad (q = 0,\ 1,\ \dots,\ r-1,\ l),$$

subordinato del sistema (1) e contenente il sistema (1′).

Posto ciò, si osservi che il punto $\bar{x}$, considerato nel num. 3, non annullando la matrice J', ossia non giacendo nella *varietà jacobiana*, Φ, *del sistema* (1′), è doppio per una sola quadrica, Q_l, del sistema (1_l) e che i parametri λ^q di Q_l son dati dalle:

$$(9) \qquad \lambda^s : \lambda^l = \bar{\varphi}^{so} : \bar{\varphi}^{lo},$$

essendo φ^{qo} il complemento algebrico di $\partial f_q / \partial x^0$ nel determinante Δ_l e:

$$\bar{\varphi}^{qo} = \varphi^{qo}(\bar{x}_0,\ \dots,\ \bar{x}_r).$$

Non giacendo il punto $\bar{x}$ nella varietà Φ, la quadrica Q_l non giacerà nel sistema (1′) e perciò sarà $\lambda_l \neq 0$.

Supposto (se è possibile) che il punto $\bar{x}$, pur non giacendo nella varietà Φ, giaccia nell'ipersuperficie $\varphi^{lo} = 0$, ossia [usando una notazione più semplice (num. 2)] nell'ipersuperficie $\varphi^0 = 0$, dalle (9) si dedurranno (essendo $\lambda^l \neq 0$) le:

$$\bar{\varphi}^{so} = 0 \qquad (s = 0,\ 1,\ \dots,\ r-1).$$

Pertanto *un punto di* S_r, *se giace nell'ipersuperficie* $\varphi^0 = 0$, *ma non nella varietà* Φ, *giace in tutte le ipersuperficie* (d'ordine r) $\varphi^{so} = 0$, che non siano indeterminate.

Si può giungere al risultato precedente anche osservando che il punto $\bar{x}$, per la proposizione preannunciata in questo num., è coniugato dell'iperpiano $x_0 = 0$ rispetto ad almeno una quadrica, Q, del sistema (1′) e che esso, perciò, è coniugato dello stesso iperpiano rispetto al fascio delle due quadriche (necessariamente distinte) Q, Q_l. Etc..

OSSERVAZIONE. – Le r funzioni omogenee (di grado zero) nelle x_i:

$$(10) \qquad \frac{\varphi^{so}}{\varphi^0} \qquad (s = 0,\ 1,\ \dots,\ r-1)$$

non sono tutte costanti.

Invero, contrariamente, coesisterebbero le identità:

$$\varphi^{so} \equiv h^s \varphi^0,$$

le h^i essendo costanti non tutte nulle, ed allora, utilizzando opportunamente l'identità $\Delta_l \equiv 0$, risulta che le quadriche:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ \dots,\ f_{l-1} = 0,\ f_l = 0$$

non sarebbero indipendenti linearmente.

5. – Giova rilevare per il seguito che:

Le ipersuperficie (d'ordine r) $\varphi^i = 0$ $(i = 0, 1, \dots, r)$ *son tutte riducibili.*

Invero, se, contrariamente, fosse irriducibile, ad es., l'ipersuperficie $\varphi^0 = 0$, il punto generico di questa, se giace nella varietà Φ, giacerebbe in tutte le ipersuperficie $\varphi^t = 0$ $(t = 1, 2, \dots, r)$ e, se, invece, non giace nella varietà Φ, giacerebbe in tutte le ipersuperficie $\varphi^{s0} = 0$, che non siano indeterminate (num. 4).

Nella prima alternativa, le $\varphi^t = 0$ coinciderebbe tutte con la $\varphi^0 = 0$ (questa essendo irriducibile) e perciò coesisterebbero le identità:

$$\varphi^t \equiv k^t \varphi^0 \qquad (t = 1, 2, \dots, r),$$

le k^t essendo costanti non nulle.

Segue (num. 3) che il sistema (1') avrebbe un punto base doppio, contro l'ipotesi.

Nella seconda alternativa, le $\varphi^{s0} = 0$, che non siano indeterminate, coinciderebbero tutte con la $\varphi^0 = 0$ (questa essendo irriducibile) e perciò coesisterebbero le identità:

$$\varphi^{s0} \equiv h^s \varphi^0 \qquad (s = 0, 1, \dots, r-1),$$

le h^s essendo costanti (non tutte nulle), in contrasto con l'Oss. del num. 4.

Inoltre giova osservare per il seguito che:

Se l'ipersuperficie generica $\varphi = 0$ del sistema lineare:

$$\mu_i \varphi^i = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, r) \tag{11}$$

possiede una componente (multipla) $\alpha^\mu = 0$, essendo α una forma irriducibile e μ un intero maggiore dell'unità, la $\alpha = 0$ non può esser variabile, quando la $\varphi = 0$ descrive il sistema (11).

Invero, contrariamente, il luogo descritto dal punto generico della $\alpha^\mu = 0$ giacerebbe nella varietà base del sistema (11) [3], che, pertanto, conterrebbe la $\alpha = 0$ (questa essendo irriducibile).

[3] E. BERTINI, *Sui sistemi lineari*, Rend. Ist. Lomb., 15 (2), 1880.

Dunque la $\alpha^{\mu}=0$ non potrebbe esser variabile al variare della $\varphi=0$.

Dall'osservazione precedente deriva che:

Se (come si supporrà) il riferimento proiettivo assunto in S, è generico, ogni eventuale componente multipla d'una qualsiasi delle ipersuperficie (riducibili) $\varphi^i=0$ è componente di tutte le rimanenti ed ha per queste multiplicità uguale alla primitiva.

Segue che *le forme φ^i non sono prime tra loro.*

Infatti, se ciò non fosse, il punto generico d'una qualsiasi componente $\alpha^{\nu}=0$, ad es., della $\varphi^0=0$ (essendo α una forma irriducibile e ν un intero positivo non nullo) non giacerebbe nella varietà base del sistema (11), cioè nella varietà Φ, e perciò (num. 4) giacerebbe in tutte le $\varphi^{so}=0$, che non siano indeterminate, ed inoltre (secondo precede) non potrebbe esser multiplo (cioè dovrebbe esser $\nu=1$).

Pertanto le forme φ^{so} $(s=0, 1, \ldots, r-1)$ differirebbero dalla forma φ^o soltanto per costanti (non tutte nulle), in contrasto con l'Oss. del num. 4.

Se, a norma del risultato precedente, si chiama Φ^0 il m.c.d. (massimo comune divisore) delle forme φ^i, si hanno le identità:

$$\varphi^i \equiv \Phi^0 \cdot \Psi^i \qquad (i=0, 1, \ldots, r), \tag{12}$$

dove le Ψ^i son *effettive* forme (d'ugual grado, prime tra loro), altrimenti le φ^i differirebbero tra loro soltanto per costanti non nulle, in contrasto con l'ipotesi del num. 3.

Ora si osservi che le forme Φ^0 e Ψ^0 son prime tra loro.

Infatti, se, contrariamente, Φ^0 e Ψ^0 avessero un divisore comune α (non costante), multiplo secondo $\mu_1>0$ per Φ^0 e secondo $\mu_2>0$ per Ψ^0, la $\varphi^0=0$, per la prima della identità (12), avrebbe la componente multipla $\alpha^{\mu_1+\mu_2}=0$ $(\mu_1+\mu_2\geq 2)$, la quale, per un rilievo precedente, sarebbe quindi componente di tutte le $\varphi^t=0$ $(t=1, 2, \ldots, r)$, cosicchè Φ^0 sarebbe divisibile per $\alpha^{\mu_1+\mu_2}$, anzichè soltanto per α^{μ_1}.

Dall'osservazione precedente deriva che ogni eventuale componente della $\Psi^0=0$ non può esser multipla (altrimenti la stessa componente apparterrebbe a tutte le $\varphi^t=0$ e perciò alla $\Phi^0=0$).

Dopo di ciò, si conclude, a norma d'un risultato del num. 4, che *la $\Psi^0=0$ è componente di tutte le $\varphi^{so}=0$,* che non siano indeterminate, e quindi che si hanno le identità:

$$\varphi^{qo} \equiv \Phi^{qo}\,\Psi^o \qquad (q=0, 1, \ldots, r-1, l), \tag{12'}$$

l'ultima delle quali si ottiene dalla prima delle (12), osservando che è $\varphi^0 \equiv \varphi^{lo}$ e ponendo $\Phi^{lo} \equiv \Phi^o$.

OSSERVAZIONE. – Secondo precede *la varietà Φ si distribuisce nell'ipersuperficie:*

$$\Phi^0 = 0, \tag{13}$$

essendo Φ^0 il m.c.d. *delle forme φ^i, e nell'eventuale intersezione delle ipersuperficie residue $\Psi^i = 0$.*

Aggiungasi che l'ipersuperficie (13) non può esser un iperpiano.

Se, infatti, l'ipersuperficie (13) fosse un iperpiano, coesisterebbero le identità:

$$\Phi^{q0} \equiv c^{qi} x_i \quad (i = 0, 1, \ldots, r; \; q = 0, 1, \ldots, r-1, l),$$

le c^{qi} essendo costanti non tutte nulle.

Se, ad es., non fossero tutte nulle le c^{q0}, l'identità:

$$f_q \frac{\partial \varphi^{q0}}{\partial x^0} \equiv 0,$$

che può dedursi dall'altra $\Delta_l \equiv 0$, condurrebbe, ricordate le (12), al medesimo assurdo, che si è incontrato nell'Oss. del num. 4.

6. – Essendo nullo identicamente il determinante Δ_l, ossia il determinante funzionale delle $r+1$ forme quadriche (num. 1):

$$y_q = f_q(x_0, x_1, \ldots, x_r) \quad (q = 0, 1, \ldots, r-1, l), \tag{14}$$

dove l è uno qualsiasi dei numeri $r, \ldots, h$, ma non essendo nulla nel punto $\bar{x}$, considerato nel num. 3, la matrice J', ossia la matrice funzionale delle prime r delle forme (14), esisterà un intorno ad r dimensioni di $\bar{x}$, nel quale la y_l è funzione delle $y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}$, ossia:

$$y_l = F_l(y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}), \tag{15}$$

mentre le $y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}$ son indipendenti funzionalmente.

Sostituendo alle x_i le λx_i ($\lambda \neq 0$) e ponendo $\lambda^2 = k$, la (15), tenute presenti le (14), diviene:

$$k y_l = F_l(k y_0, k y_1, \ldots, k y_{r-1}).$$

Dunque: *la $F_l(y_0, y_1, \ldots, y_{r-1})$ è funzione omogenea di primo grado delle variabili indipendenti $y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}$* e perciò *le $\partial F_l / \partial y_s$ ($s = 0, 1, \ldots, r-1$) son funzioni omogenee di grado zero delle stesse variabili.*

7. - Le (14), sostituite nella (15), la soddisfanno identicamente rispetto alle x_i nell'intorno di $\bar{x}$, considerato nel num. 6, e pertanto, derivando rispetto ad x_i, si ottengono le identità seguenti:

$$\frac{\partial F_l}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial x_i} - \frac{\partial y_l}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, r;\ s = 0, 1, \dots, r-1).$$

Essendo le identità precedenti lineari omogenee nelle:

$$\frac{\partial F_l}{\partial y_0}, \dots, \frac{\partial F_l}{\partial y_{r-1}}, -1$$

e supponendo che il punto $\bar{x}$ non giaccia nell'ipersuperficie $\varphi^{lo} = 0$, si deducono, per $x_i = \bar{x}_i$, le:

$$\frac{\partial F_l}{\partial \bar{y}_s} = -\frac{\bar{\varphi}^{so}}{\bar{\varphi}^{lo}} \qquad (s = 0, 1, \dots, r-1,$$

avendo posto:

$$\bar{y}_s = f_s(\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_r), \frac{\partial F_l}{\partial \bar{y}_0} = \left(\frac{\partial F_l}{\partial y_0}\right)_{y_s = \bar{y}_s}, \dots .$$

Essendo, per l'ipotesi, $\bar{\varphi}^{lo} \neq 0$ e quindi, per l'ultima delle (12'):

$$\bar{\Phi}^{lo} \cdot \bar{\Psi}^{o} \neq 0,$$

le ultime uguaglianze possono scriversi, ricordate le (12'):

$$(16) \qquad \frac{\partial F_l}{\partial \bar{y}_s} = -\frac{\bar{\Phi}^{so}}{\bar{\Phi}^{lo}},$$

che serviranno nel seguito.

8. - Il punto $\bar{x}'$, dato dalle (8), è distinto dal punto $\bar{x}$, se questo (come si supporrà) non è base del sistema (1').

Pertanto il punto $\bar{x}'$, supposto (se è possibile) non situato nella varietà Φ, non è base del sistema (1'): invero, contrariamente, la retta $\bar{x}\bar{x}'$ sarebbe coniugata del punto $\bar{x}'$ rispetto al sistema (1') e perciò il punto $\bar{x}'$ sarebbe doppio per qualche quadrica del sistema stesso, ossia giacerebbe nella varietà Φ, contro l'ipotesi.

Ordunque non sono tutti nulli così i valori $\bar{y}_q$, come i valori $\bar{y}'_q$ assunti risp. in $\bar{x}$, $\bar{x}'$ dalle $r+1$ forme quadriche nelle x_i (num 1):

$$y_q = a_q^{ik} x_i x_k \quad (i, k = 0, 1, \dots, r;\ q = 0, 1, \dots, r-1, l)$$

Siccome i valori assunti dalle precedenti forme nel punto mobile sulla retta $\bar{x}\bar{x}'$, cioè nel punto:

$$x_i = \nu_1 \bar{x}_i + \nu_2 \bar{x}'_i ,$$

son espressi dalle:

$$y_q = \nu_1^2 \bar{y}_q + 2\nu_1\nu_2 a_q^{ik} \bar{x}_i \bar{x}'_k + \nu_2^2 \bar{y}'_q ,$$

che, essendo $\bar{x}$ e $\bar{x}'$ mutuamente coniugati rispetto al sistema (1_l) ([4]), possono scriversi:

$$y_q = \nu_1^2 \bar{y}_q + \nu_2^2 \bar{y}'_q , \tag{17}$$

segue che le y_q non sono tutte nulle identicamente rispetto alle ν_1, ν_2.

Ora si osservi che il generico punto x della retta $\bar{x}\bar{x}'$ non giace nella varietà Φ (ivi non giacendo $\bar{x}$) e che, pertanto (num. 6), esiste sulla retta $\bar{x}\bar{x}'$ un intorno di x, nel quale è applicabile la (15).

Allora le (17), sostituite nella (15), la soddisfanno identicamente nell'intorno suddetto e pertanto, derivando rispetto a ciascuna delle ν_1, ν_2, si ottengono le seguenti identità (rispetto alle ν_1, ν_2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_l}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial \nu_1} - \frac{\partial y_l}{\partial \nu_1} = 0 , \\ \frac{\partial F_l}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial \nu_2} - \frac{\partial y_l}{\partial \nu_2} = 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (s = 0, 1, \ldots, r-1) \tag{18}$$

Se, allora, si considerano le identità (rispetto alle ν_1, ν_2):

$$\frac{\partial y_q}{\partial \nu_1} = 2\nu_1 \bar{y}_q ,$$

$$\frac{\partial y_q}{\partial \nu_2} = 2\nu_2 \bar{y}_q ,$$

ottenute derivando le (17) rispetto a ciascuna delle ν_1, ν_2, le (18), supposto $\nu_1 \cdot \nu_2 \neq 0$, divengono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_l}{\partial y_s}\bar{y}_s - \bar{y}_l = 0 , \\ \frac{\partial F_l}{\partial y_s}\bar{y}'_s - \bar{y}'_l = 0 . \end{aligned} \tag{18'}$$

([4]) Infatti (num. 4) la quadrica del sistema (1_l), che ha punto doppio in $\bar{x}$, non giace nel sistema $(1')$.

Di qui deducesi che $\bar{x}$ e $\bar{x}'$ son altresì mutuamente coniugati rispetto al sistema (1).

Siccome (num. 7) il punto $\bar{x}$ non giace nell'ipersuperficie $\varphi^{l o}=0$, ivi non giace neppure il generico punto x della retta $\overline{x x'}$ e quindi le (16) sussistono altresì sostituendo il punto x al punto $\bar{x}$.

Dopo di ciò, le (18'), ove le $\partial F_l / \partial y_r$ sian calcolate nel suddetto punto x, divengono:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{q o} \bar{y}_q &= 0, \\
\Phi^{q o} \bar{y}'_q &= 0 .
\end{aligned} \tag{19}
$$

Infine si osservi che i primi membri delle (19), essendo forme (di ugual grado) nelle coordinate x_i del punto x sopra considerato e perciò nelle variabili (non entrambe nulle) ν_1, ν_2, son nulli identicamente rispetto a queste.

9. - Se dalle (17) si eliminano le ν_1, ν_2, si è condotti ad annullare la seguente matrice:

$$
\left\|\begin{array}{ccccc}
\bar{y}_0 & \bar{y}_1 & \cdots & \bar{y}_{r-1} & \bar{y}_l \\
\bar{y}'_0 & \bar{y}'_1 & \cdots & \bar{y}'_{r-1} & \bar{y}'_l \\
y_0 & y_1 & \cdots & y_{r-1} & y_l
\end{array}\right\| . \tag{20}
$$

Supposto (se è possibile) che *non* sia nullo, ad es., il seguente minore:

$$
D=\left|\begin{array}{cc}
\bar{y}_0 & \bar{y}_1 \\
\bar{y}'_0 & \bar{y}'_1
\end{array}\right|
$$

estratto dalle prime due righe della (20), segue che, delle $r+1$ forme quadriche nelle ν_1, ν_2, date dalle (17), le $y_2, \ldots, y_{r-1}, y_l$ son combinazioni lineari omogenee a coefficienti costanti delle y_0, y_1 (entrambe non nulle identicamente, altrimenti sarebbe $D=0$, contro l'ipotesi).

Ora si considerino le (19) e si supponga che in queste le $\Phi^{q o}$ sian calcolate in un dato punto della retta $\overline{x x'}$, ad es. in $\bar{x}$, cosicchè subito deducesi l'identità (rispetto alle ν_1, ν_2):

$$
\bar{\Phi}^{q o}(\nu_1^2 \bar{y}_q + \nu_2^2 \bar{y}'_q) = 0,
$$

ossia, per le (17):

$$
\bar{\Phi}^{q o} y_q = 0 . \tag{21}
$$

Allora, essendo il primo membro della (21), per un rilievo precedente, una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti delle y_0, y_1, segue che le due coppie di punti della retta $\bar{x}\,\bar{x}'$:

$$\nu_1^2\bar{y}_0 + \nu_2^2\bar{y}'_0 = 0,$$

$$\nu_1^2\bar{y}_1 + \nu_2^2\bar{y}'_1 = 0$$

devono coincidere e perciò che dev'essere $D = 0$, contro l'ipotesi.

Si conclude, dunque, che la matrice formata con le prime due righe della (20) dev'essere nulla e quindi, per $l = r, \ldots, h$, che dev'essere:

$$\bar{y}'_j = c\,\bar{y}_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, h), \tag{22}$$

essendo c una costante non nulla.

10. - Dalle (22) subito deducesi che le quadriche del sistema (1), che passano per $\bar{x}$ (o $\bar{x}'$), passano tutte per $\bar{x}'$ (o $\bar{x}$).

Essendo $\bar{x}$ e $\bar{x}'$ mutuamente coniugati rispetto al sistema (1), segue che *le quadriche del sistema* (1), *che passano per* $\bar{x}$, *contengono tutte la retta* $\bar{x}\,\bar{x}'$.

Le quadriche suddette non possono contenere tutte un medesimo spazio S_d, con $d > 1$, uscente dal punto $\bar{x}$, altrimenti questo sarebbe doppio per qualche quadrica del sistema (1') e perciò giacerebbe nella varietà Φ, contro l'ipotesi.

Dunque *il sistema* (1) *è composto con una congruenza lineare di* S_1.

Osservato (num 6) che, per le prime r delle (22), coesistono le:

$$\frac{\partial F_l}{\partial \bar{y}'_s} = \frac{\partial F_l}{\partial \bar{y}_s} \qquad (s = 0, 1, \ldots, r-1)$$

e che, se $\bar{x}'$ non giace nella $\varphi^{lo} = 0$ (ossia nella $\varphi^o = 0$), le (16) sussistono altresì sostituendo $\bar{x}'$ ad $\bar{x}$, deduconsi subito le:

$$\bar{\Phi}'^{qo} = \gamma\,\bar{\Phi}^{qo} \qquad (q = 0, 1, \ldots, r-1, l),$$

essendo γ una costante non nulla e $\bar{\Phi}'^{qo} = \Phi^{qo}(\bar{x}'_o, \ldots, \bar{x}'_r)$.

Allora, per le (9) e le (12'), risulta che la quadrica del sistema (1_l), che ha punto doppio in $\bar{x}$ (o in $\bar{x}'$), ha pure punto doppio in $\bar{x}'$ (o in $\bar{x}$).

Segue che *le* ∞^{h-r} *quadriche del sistema* (1), *che hanno punto doppio in* $\bar{x}$, *contengono tutte la retta* $\bar{x}\,\bar{x}'$ *come retta doppia.*

Pervenuta alla Segreteria dell'U. M. I.
il 31 maggio 1966.