Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mario Pezzana

Trasformazioni puntuali fra due S_3 a configurazione caratteristica quasi armonica. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **21** (1966), n.3, p. 251–258.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1966_3_21_3_251_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1966.

Trasformazioni puntuali fra due S_3 a configurazione caratteristica quasi armonica

Mario Pezzana (Bologna)

Nota II (*)

Sunto. - *Si veda la Nota I.*

3. – Data una coppia regolare A, B di punti che si corrispondono in una trasformazione puntuale, la giacitura di un piano per A si dice *giacitura caratteristica* se alla calotta del secondo ordine con centro in A, che appartiene al piano, corrisponde nella trasformazione una calotta piana del secondo ordine (con centro in B). Condizione necessaria e sufficiente affinchè in una coppia di punti vi sia una giacitura caratteristica è che tre direzioni caratteristiche siano complanari ([1]).

Si ha subito allora che, nel nostro caso, sono caratteristici i quattro sistemi di faccette $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$.

Cerchiamo ora le condizioni affinchè esse siano organizzabili.

A tale scopo occorre calcolare le espressioni

$$(15) \qquad [d\omega_1]\wedge\omega_1, \quad [d\omega_2]\wedge\omega_2, \quad [d\omega_3]\wedge\omega_3, \quad [d(\omega_1+\omega_2+\omega_3)]\wedge(\omega_1+\omega_2+\omega_3)$$

e vedere per quali valori degli invarianti esse si annullano. Si trova rispettivamente

$$(16) \qquad \lambda + \nu - 4 = 0, \quad \mu + \lambda - 4 = 0, \quad \nu + \mu - 4 = 0, \quad \lambda = \mu = \nu.$$

Resta così intanto dimostrato che, per una trasformazione generica del tipo di trasformazioni considerate, le faccette caratteristiche non si organizzano in superficie.

4. – Esaminiamo il caso in cui si ha $\lambda = \mu = \nu$.

Per differenziazione esterna delle (14) si ottiene

$$\lambda = \mu = \nu = \pm \frac{2i\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \rho = \pm 4i\sqrt{3} - 3.$$

(*) La Nota I appare a pag. 161 del fascicolo precedente.

([1]) L. Muracchini, *Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3) 7, pp. 123-131, n. 4 (1952).

Si vede allora subito che in tal caso nessun altro sistema di faccette caratteristiche si può organizzare. Così pure si vede che non possono organizzarsi contemporaneamente gli altri tre sistemi di faccette caratteristiche, in quanto si avrebbe allora $\lambda = \mu = \nu = 2$, il che risulta assurdo per quanto detto sopra.

È perciò dimostrato che non vi possono essere più di due sistemi di superficie caratteristiche e, se tale sistema è quello delle faccette $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, tale sistema è unico.

5. - Restringiamo ora le considerazioni al caso $\lambda = \mu = \nu = \pm \frac{2i\sqrt{3}}{3}$. Si tratta di due sole trasformazioni, con le loro inverse, s'intende a meno di omografie.

Si osserva subito che $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ è un differenziale esatto.

L'equazione delle asintotiche delle superficie integrali di $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ è

$$(\omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{13})\omega_1 + (\omega_{21} + \omega_{22} + \omega_{23})\omega_2 + (\omega_{31} + \omega_{32} + \omega_{33})\omega_3 = 0$$

che è indeterminata per le (12).

Il sistema delle predette superficie è perciò un sistema di piani.

Inoltre si osservi che, detti A, A_1, A_2, A_3 i punti fondamentali in uno spazio e B, B_1, B_2, B_3 quelli dell'altro, si ha

$$(17)\quad \begin{aligned} d(A_1 - A_3) &= (\omega_{11} - \omega_{31})(A_1 - A_3) + (\omega_{12} - \omega_{32})(A_2 - A_3) \\ d(A_2 - A_3) &= (\omega_{21} - \omega_{31})(A_1 - A_3) + (\omega_{22} - \omega_{32})(A_2 - A_3). \end{aligned}$$

Le (17) ci dicono che la retta congiungente i punti $A_1 - A_3$ e $A_2 - A_3$ è fissa. Perciò il sistema di piani è un fascio. L'analogo si ottiene nello spazio delle B.

Operando come nelle (15), si vede che le faccette definite da $\omega_1 + \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\omega_2 = 0$ e $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\omega_1 + \omega_2 = 0$ sono organizzabili in entrambi gli spazi.

Operiamo allora le sostituzioni

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (\pm i\sqrt{3} + 3)\bar{\omega}_1 \mp 2i\sqrt{3}\,\bar{\omega}_2 \\ \omega_2 &= \mp 2i\sqrt{3}\,\bar{\omega}_1 + (\pm i\sqrt{3} + 3)\bar{\omega}_2 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 3\bar{\omega}_3. \end{aligned}$$

Poniamo ancora ω_1, ω_2, ω_3 al posto di $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ per semplicità di scrittura.

Si ha allora

$$
\begin{aligned}
&\omega_{00} = \pm i\sqrt{3}\,\omega_3\\
&\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_{30} = 3(\pm 4i\sqrt{3} - 3)\omega_3\\
&\omega_{11} = (\mp 5i\sqrt{3} - 1)\omega_1 + (\mp 3i\sqrt{3} + 5)\omega_2\\
&\omega_{22} = (\pm 3i\sqrt{3} - 7)\omega_1 + (\pm 4i\sqrt{3} + 2)\omega_2 + (3 \mp i\sqrt{3})\omega_3\\
&\omega_{33} = (\pm 2i\sqrt{3} + 8)\omega_1 + (\mp i\sqrt{3} + 7)\omega_2\\
(18)\qquad &\omega_{12} = (\pm 3i\sqrt{3} - 7)\omega_1 + (\pm 8i\sqrt{3} + 2)\omega_2 + (3 \mp 2i\sqrt{3})\omega_3\\
&\omega_{23} = (\pm 2i\sqrt{3} + 8)\omega_1 + (\mp 3i\sqrt{3} - 13)\omega_2 \pm i\sqrt{3}\,\omega_3\\
&\omega_{31} = (\mp 5i\sqrt{3} - 1)\omega_1 + (\mp 5i\sqrt{3} + 11)\omega_2 + (\pm 2i\sqrt{3} - 6)\omega_3\\
&\omega_{21} = (\mp 5i\sqrt{3} - 1)\omega_1 + (\mp i\sqrt{3} + 11)\omega_2 - 3\omega_3\\
&\omega_{32} = (\pm 3i\sqrt{3} - 7)\omega_1 + (\pm 6i\sqrt{3} - 4)\omega_2 + (6 \mp 2i\sqrt{3})\omega_3\\
&\omega_{13} = (\pm 2i\sqrt{3} + 8)\omega_1 + (\mp 5i\sqrt{3} - 7)\omega_2,
\end{aligned}
$$

e inoltre

$$
\begin{aligned}
&\tau_{00} = \mp i\sqrt{3}\,\omega_3\\
&\tau_{10} = \tau_{20} = \tau_{30} = 3(\pm 5i\sqrt{3} - 6)\omega_3\\
&\tau_{11} = (\mp 8i\sqrt{3} + 2)\omega_1 + (\mp 3i\sqrt{3} + 11)\omega_2 + (\pm 2i\sqrt{3} - 6)\omega_3\\
&\tau_{22} = (\pm 3i\sqrt{3} - 13)\omega_1 + (\pm 7i\sqrt{3} - 1)\omega_2 + (\mp i\sqrt{3} + 6)\omega_3\\
&\tau_{33} = (\pm 5i\sqrt{3} + 11)\omega_1 + (\mp 4i\sqrt{3} - 10)\omega_2\\
(19)\qquad &\tau_{12} = (\pm 5i\sqrt{3} - 7)\omega_1 + (\pm 7i\sqrt{3} - 1)\omega_2 + (\mp 2i\sqrt{3} + 3)\omega_3\\
&\tau_{23} = (\pm i\sqrt{3} + 11)\omega_1 + (\mp 4i\sqrt{3} - 10)\omega_2 + (\pm i\sqrt{3} - 3)\omega_3\\
&\tau_{31} = (\mp 6i\sqrt{3} - 4)\omega_1 + (\mp 3i\sqrt{3} + 11)\omega_2 + (\pm 2i\sqrt{3} - 6)\omega_3\\
&\tau_{21} = (\mp 4i\sqrt{3} + 2)\omega_1 + (\mp 3i\sqrt{3} + 11)\omega_2 - 3\omega_3\\
&\tau_{32} = (\pm i\sqrt{3} - 7)\omega_1 + (\pm 7i\sqrt{3} - 1)\omega_2 + (\mp 2i\sqrt{3} + 6)\omega_3\\
&\tau_{13} = (\pm 3i\sqrt{3} + 5)\omega_1 + (\mp 4i\sqrt{3} - 10)\omega_2 + 3\omega_3 .
\end{aligned}
$$

Nelle (18) e (19) bisognerà considerare tutti i segni superiori o tutti gli inferiori.

Le quattro trasformazioni omograficamente distinte sono le due che si ottengono per il doppio segno dei coefficienti e quelle che si ottengono da esse scambiando i ruoli dei due spazi.

Operiamo nei due piani le sostituzioni dei punti fondamentali

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= (\pm i\sqrt{3} + 3)(A_1 - A_3) \mp 2i\sqrt{3}(A_2 - A_3) \\
\bar{A}_2 &= \mp 2i\sqrt{3}(A_1 - A_3) + (\pm i\sqrt{3} + 3)(A_2 - A_3) \qquad (20) \\
\bar{A}_3 &= 3A_3
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\bar{B}_1 &= (\pm i\sqrt{3} + 3)(B_1 - B_3) \mp 2i\sqrt{3}(B_2 - B_3) \\
\bar{B}_2 &= \mp 2i\sqrt{3}(B_1 - B_3) + (\pm i\sqrt{3} + 3)(B_2 - B_3) \qquad (21) \\
\bar{B}_3 &= 3B_3 .
\end{aligned}
$$

Poniamo poi nuovamente A_1, A_2, A_3 e B_1, B_2, B_3 al posto di $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ e $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, $\bar{B}_3$ per semplicità di notazione.

Si ha nei due spazi rispettivamente

$$
\begin{aligned}
dA &= \mp i\sqrt{3}\,\omega_3 A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 \\
dA_1 &= -\frac{1}{2}(\pm i\sqrt{3} + 3)\omega_3 A_1 \\
(22)\quad dA_2 &= [6(\pm i\sqrt{3} + 1)\omega_2 \mp 2i\sqrt{3}\,\omega_3]A_1 + \frac{3}{2}(\pm i\sqrt{3} + 1)\omega_3 A_2 \\
dA_3 &= 9(\pm 4i\sqrt{3} + 3)\omega_3 A + \frac{1}{2}[-(\pm 7i\sqrt{3} + 9)\omega_1 \mp 4i\sqrt{3}\,\omega_2 \pm 4i\sqrt{3}\,\omega_3]A_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2}[9(\pm i\sqrt{3} + 1)\omega_2 \mp 4i\sqrt{3}\,\omega_3]A_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dB &= \mp i\sqrt{3}\,\omega_3 B + \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 + \omega_3 B_3 \\
dB_1 &= -\frac{3}{2}(\pm i\sqrt{3} + 1)\omega_3 B_1 + [6(\pm i\sqrt{3} + 1)\omega_1 \mp 2i\sqrt{3}\,\omega_3]B_2 \\
(23)\quad dB_2 &= \frac{1}{2}(\pm 5i\sqrt{3} + 3)\omega_3 B_2 \\
dB_3 &= 9(\pm 5i\sqrt{3} - 6)\omega_3 B + \frac{1}{2}[-9(\pm i\sqrt{3} + 1)\omega_1 \pm 4i\sqrt{3}\,\omega_3]B_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2}[\mp 4i\sqrt{3}\,\omega_1 + (\pm 11i\sqrt{3} + 9)\omega_2 \mp 4i\sqrt{3}\,\omega_3]B_2 .
\end{aligned}
$$

Nelle (20), (21), (22), (23) occorrerà prendere o tutti i segni superiori o tutti i segni inferiori.

Si osservi che, per le sostituzioni eseguite, le coppie A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 non si corrispondono più in una omografia tangente alle trasformazioni in esame. Basta notare che esistono rette in uno spazio (le AA_1) che non si trasformano in rette nell'altro.

Le (22) e (23) sono utili ciò nonostante perchè si possano tradurre in sistemi alle derivate parziali che si possono integrare. Ponendo $\omega_1 = adu$, $\omega_2 = bdv$, $\omega_3 = dw$ e indicando con x, x_1, x_2, x_3 rispettivamente le coordinate di A, A_1, A_2, A_3 le (22) divengono (2)

$$
(24) \qquad
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial x}{\partial u} = a x_1 & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial x}{\partial v} = b x_2 & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = 6(i\sqrt{3}+1) b x_1 \\[2ex]
\dfrac{\partial x}{\partial w} = -\, i\sqrt{3}\, x + x_3 & \dfrac{\partial x_2}{\partial w} = -\, 2i\sqrt{3}\, x_1 + \dfrac{3}{2}(i\sqrt{3}+1) x_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial x_1}{\partial u} = 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} = -\, \dfrac{1}{2}(7i\sqrt{3}+9) a x_1 \\[2ex]
\dfrac{\partial x_1}{\partial v} = 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} = -\, 2i\sqrt{3}\, b x_1 + \dfrac{2}{9}(i\sqrt{3}+1) b x_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial x_1}{\partial w} = -\, \dfrac{1}{2}(i\sqrt{3}+3) x_1 & \dfrac{\partial x_3}{\partial w} = 9(4i\sqrt{3}-3) x + 2i\sqrt{3}\, x_1 - 2i\sqrt{3}\, x_2 .
\end{array}
$$

Analogamente, indicando con y, y_1, y_2, y_3 rispettivamente le coordinate di B, B_1, B_2, B_3 le (23) divengono

$$
(25) \qquad
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial y}{\partial u} = a y_1 & \dfrac{\partial y_2}{\partial u} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial v} = b y_2 & \dfrac{\partial y_2}{\partial v} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial w} = -\, i\sqrt{3}\, y + y_3 & \dfrac{\partial y_2}{\partial w} = \dfrac{1}{2}(5i\sqrt{3}+3) y_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial y_1}{\partial u} = 6(i\sqrt{3}+1) a y_2 & \dfrac{\partial y_3}{\partial u} = -\, \dfrac{9}{2}(i\sqrt{3}+1) y_1 - 2i\sqrt{3}\, a y_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial y_1}{\partial v} = 0 & \dfrac{\partial y_3}{\partial v} = \dfrac{1}{2}(11i\sqrt{3}+9) b y_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial y_1}{\partial w} = -\dfrac{3}{2}(i\sqrt{3}+1) y_1 \quad 2i\sqrt{3}\, y_2 & \dfrac{\partial y_3}{\partial w} = 9(5i\sqrt{3}-6) y + 2i\sqrt{3}\, y_1 - 2i\sqrt{3}\, y_2 .
\end{array}
$$

(2) Nelle formule seguenti si terrà conto solo dei segni superiori. L'altro integrale si otterrà cambiando i in $-i$.

Le condizioni di integrabilità dei due sistemi porgono

$$a = e^{-(4i\sqrt{3}+3)w}; \qquad b = e^{(2i\sqrt{3}+3)w}.$$

Eliminando nelle (24) le funzioni incognite x_1, x_2, x_3 si ottiene il sistema nella sola x:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=0; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}=0; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w}=-\frac{9}{2}(i\sqrt{3}+1)\frac{\partial x}{\partial u}; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=6(i\sqrt{3}+1)e^{(8i\sqrt{3}+9)w}\frac{\partial x}{\partial u};$$

$$(26) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial w} = -2i\sqrt{3}\, e^{6(i\sqrt{3}+1)w}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2}(7i\sqrt{3}+9)\frac{\partial x}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} = 9(4i\sqrt{3}-3)x + 2i\sqrt{3}\, e^{(4i\sqrt{3}+3)w}\frac{\partial x}{\partial u} - 2i\sqrt{3}\, e^{-(2i\sqrt{3}+3)w}\frac{\partial x}{\partial v} - i\sqrt{3}\,\frac{\partial x}{\partial w}.$$

Così, eliminando nelle (25) y_1, y_2, y_3 si ottiene

$$(27) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 6(i\sqrt{3}+1)e^{-(10i\sqrt{3}+9)w}\frac{\partial y}{\partial v}; \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} = \frac{9}{2}(i\sqrt{3}+1)\frac{\partial y}{\partial v}; \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w} = -\frac{1}{2}(11i\sqrt{3}+9)\frac{\partial y}{\partial u} - 2i\sqrt{3}\, e^{-6(i\sqrt{3}+1)w}\frac{\partial y}{\partial v}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} = -i\sqrt{3}\frac{\partial y}{\partial w} + 9(5i\sqrt{3}-6)y + 2i\sqrt{3}e^{(4i\sqrt{3}+3)w}\frac{\partial y}{\partial u} - 2i\sqrt{3}e^{-(2i\sqrt{3}+3)w}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

La prima delle (26) e la prima dalle (27), tenuto conto delle seconde di entrambi i sistemi, ci danno

$$(28) \qquad x = \alpha(w)u + \beta(v, w); \qquad y = \bar{\alpha}(w)v + \bar{\beta}(u, w).$$

Sostituendo le (28) nelle quarte equazioni di (26) e (27) si ottiene

$$(29) \qquad \alpha = k_1 e^{-\frac{9}{2}(i\sqrt{3}+1)w}; \qquad \bar{\alpha} = h\, e^{\frac{9}{2}(i\sqrt{3}+1)w}.$$

Le terze dei due sistemi danno

$$(30) \qquad \begin{aligned} \beta &= 3k_1(i\sqrt{3}+1)e^{\frac{1}{2}(7i\sqrt{3}+9)w}v^2 + \mu(w)v + \lambda(w) \\ \bar{\beta} &= 3h_1(i\sqrt{3}+1)e^{-\frac{1}{2}(11i\sqrt{3}+9)w}u^2 + \bar{\mu}(w)u + \lambda(w). \end{aligned}$$

Sostituendo le (29) e (30) nelle (28) e queste nelle rimanenti equazioni dei due sistemi, si ottengono, per μ, λ, $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$, delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Integrando queste ultime si ottengono gli integrali generali:

$$
\begin{aligned}
x = {} & k_1\Big[e^{-\frac{9}{2}(i\sqrt{3}+1)w}u + 3(i\sqrt{3}+1)e^{\frac{1}{2}(7i\sqrt{3}+9)w}v^2 + \\
& + \frac{2i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}+3}e^{\frac{3}{2}(i\sqrt{3}+1)w}v + \frac{3i\sqrt{3}}{(4i\sqrt{3}+3)(2i\sqrt{3}+3)^2}e^{-\frac{1}{2}(i\sqrt{3}+3)w}\Big] + \\
& + k_2\Big[e^{\frac{1}{2}(7i\sqrt{3}+9)w}v + \frac{1}{3(i\sqrt{3}+1)(i\sqrt{3}-2)^2}e^{\frac{3}{2}(i\sqrt{3}+1)w}\Big] + \\
& + k_3 e^{\frac{1}{2}(7i\sqrt{3}+9)w} + k_4 e^{-\frac{9}{2}(i\sqrt{3}+1)w}
\end{aligned}
$$

$$
(31)\quad
\begin{aligned}
y = {} & h_1\Big[e^{\frac{9}{2}(i\sqrt{3}+1)w}u + 3(i\sqrt{3}+1)e^{-\frac{1}{2}(11i\sqrt{3}+9)w}v^2 + \\
& + \frac{2}{i\sqrt{3}-4}e^{-\frac{3}{2}(i\sqrt{3}+1)w}v + \frac{2i\sqrt{3}+1}{(i\sqrt{3}-2)(i\sqrt{3}-4)}e^{\frac{1}{2}(5i\sqrt{3}+3)w}\Big] + \\
& + h_2\Big[e^{-\frac{1}{2}(11i\sqrt{3}+9)w}v + \frac{1}{3(i\sqrt{3}+1)(i\sqrt{3}-2)}e^{-\frac{3}{2}(i\sqrt{3}+1)w}\Big] + \\
& + h_3 e^{-\frac{1}{2}(11i\sqrt{3}+9)w} + h_4 e^{\frac{9}{2}(i\sqrt{3}+1)w}.
\end{aligned}
$$

A meno di omografie nei due spazi, si possono allora interpretare come coordinate omogenee dei punti nei due spazi gli integrali particolari distinti che si ottengono supponendo nulle tutte le costanti tranne una.

Passando a coordinate non omogenee, eliminando i parametri e rimettendo il doppio segno si ottiene

$$
(32)\quad
\left\{
\begin{aligned}
& x' - 3(1 \pm i\sqrt{3})z'^{-1}y'^2 - yz^{-1} + \frac{2}{3(1 \pm i\sqrt{3})(-2 \pm i\sqrt{3})}z^{-\frac{2}{3}}z'^{-\frac{1}{3}} = 0 \\
& x - y'z'^{-1} - 3(1 \pm i\sqrt{3})z^{-1}y^2 + \frac{4}{-2 \pm i\sqrt{3}}yz^{-\frac{2}{3}}z'^{-\frac{1}{3}} - \\
& \qquad\qquad - \frac{5(1 \pm i\sqrt{3})}{3(-4 \pm i\sqrt{3})(-2 \pm i\sqrt{3})}z^{-\frac{1}{3}}z'^{-\frac{2}{3}} = 0 \\
& z'^{9 \pm 8i\sqrt{3}} = z^{-9 \mp 10i\sqrt{3}}
\end{aligned}
\right.
$$

dove ancora i segni vanno presi come notato in precedenza.

Queste trasformazioni *ammettono un fascio di piani corrispon-*

denti, come si sapeva, e sono i piani $z =$ costante, ai quali corrispondono piani pure della forma $z' =$ costante (3).

Su ciascuna di tali coppie di piani *subordinano una trasformazione cremoniana, anzi biintera* (4).

Infatti le (32) assumono la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x' + ay'^2 + by + c = 0 \\ x + \alpha y^2 + \beta y' + \gamma = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(con } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \text{ costanti).} \tag{33}$$

Il sistema (33), sia risolto rispetto ad x e y, che risolto rispetto ad x' e y', dà dei polinomi ai secondi membri.

La rete omaloidica sui piani $z = k$ assume la forma

$$\lambda[a(\alpha y^2 + x + \gamma)^2 - b\beta^2 y + c\beta^2] + \mu(\alpha y^2 + x + \gamma) + \nu = 0$$

e quella sul piano corrispondente è analoga.

I punti base, che saranno in numero di 15, trattandosi di una rete omaloidica di quartiche, saranno tutti impropri e coincidono tutti nel punto improprio dell'asse x.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 22 Aprile 1966

(3) La coppia di piani $z = z' = 0$ è evidentemente eccezionale.

(4) M. VILLA, *Un'osservazione sulla geometria affine delle trasformazioni puntuali*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3) 19, pp. 53-59, n. 2 (1964).